

DEA d'Automatique et Informatique Industrielle
Epreuves de Tronc Commun 2e session, 3 juin 2002

Cours "Outils pour le Non Linéaire" (J.-P. Richard)
(documents personnels autorisés)

Premier problème

Etudier les propriétés de convergence du système (1) suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -8x_1 + x_2^2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2. \end{cases} \quad (1)$$

Un résumé sous forme de dessin dans le plan (x_1, x_2) est souhaité.

Pour aider les calculs éventuels, on note que la matrice $A = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ a comme valeurs et vecteurs propres (λ_i, u_i) :

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{177} \cong 2.15 & \leftrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{177} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 1.27 \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{177} \cong -11.15 & \leftrightarrow u_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} - \frac{1}{16}\sqrt{177} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deuxième problème

Etudier les propriétés de convergence du système (2) suivant, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = -y - x^2. \end{cases} \quad (2)$$

Troisième problème

On considère le système non linéaire suivant, sur \mathbb{R}^2 :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

$$\text{avec ici } f(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(x) = g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Pour appliquer le théorème rappelé ci-dessous, on doit calculer les vecteurs $\{g, [f, g], [[f, g], g], \dots\}$ (où $[f, g]$ désigne le crochet de Lie de f et g). Calculer et donner les points x_1 en lesquels le système (3)-(4) est localement faiblement commandable.

Théorème: Si les champs de vecteurs f, g sont C^∞ , le système (3) est localement faiblement commandable en x_1 si $\text{rang } \{g, [f, g], [[f, g], g], [[[f, g], g], g], \dots\}|_{x_1} = n$.