

Master AG2I, USTL-EC Lille
Epreuve de Tronc Commun 2ème session, 2 mai 2005

J.-P. Richard (durée : 2 heures, documents personnels autorisés)

Premier problème

Caractériser précisément les propriétés de stabilité (équilibre instable, stable, attractif, asymptotiquement stable, exponentiellement stable, localement, globalement, etc.) des quatre systèmes suivants ($x \in \mathbb{R}$) :

$$\dot{x} = -x^3, \quad (1)$$

$$\dot{x} = -|x|, \quad (2)$$

$$\dot{x} = -\sin x, \quad (3)$$

$$\dot{x} = x^3 - x. \quad (4)$$

Remarque: la résolution de ces équations n'est pas demandée (ni interdite).

Deuxième problème

Déterminer des contraintes sur $k(t, x) \in \mathbb{R}$ garantissant la stabilité absolue du système suivant (c'est-à-dire trouver α, β tels qu'on ait stabilité asymptotique globale de $x = 0$ sous réserve que $k(x, t) \in]\alpha, \beta[\forall (x, t) \in \mathbb{R}^4$) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - k(x, t)x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + 10x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_3, \end{cases} \quad (5)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3, k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Remarque : on pourra s'aider d'un schéma structurel du système (décomposition en sous-systèmes).

Troisième problème

Etudier les propriétés de convergence du système (6) suivant, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x-1)^2 y, \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases} \quad (6)$$

Quatrième problème

Etudier les propriétés de l'équilibre $(x, y) = 0 \in \mathbb{R}^2$ pour le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - x^3 + y^2, \\ \dot{y} = -x - 2y + y^2. \end{cases} \quad (7)$$