

Master AG2i
Epreuves de Tronc Commun 1ère session, 9 janvier 2006
Cours “Outils pour le Non Linéaire” (J.-P. Richard)

(documents personnels autorisés)

Premier problème

Caractériser (précisément) les propriétés de $x = 0 \in \mathbb{R}$ pour les systèmes suivants (dont la résolution n’est ni obligatoire, ni interdite) :

$$\dot{x} = 0, \quad (1)$$

$$\dot{x} = |x|, \quad (2)$$

$$\dot{x} = -x(1 - x^2). \quad (3)$$

Deuxième problème

Etudier les propriétés de l’équilibre $(x_1, x_2, x_3)^T = 0 \in \mathbb{R}^3$ du système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1^2 + x_2^2 - x_3. \end{cases} \quad (4)$$

Troisième problème

Etudier les propriétés de convergence du système suivant, où $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_2 + 1)^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - 1. \end{cases} \quad (5)$$

Quatrième problème

Trouver des conditions de stabilité absolue pour le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -f(t, x)x_1 - 100x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2(1 + x_1^2), \end{cases} \quad (6)$$

avec $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (il s’agit donc de trouver un secteur α, β tel que $f(t, x) \in]\alpha, \beta[\Rightarrow$ stabilité asymptotique globale de $x = 0$).

Cinquième problème

Calculer la suite des crochets de Lie : $\{g, g_1, g_2, g_3, \dots\}$ pour :

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ -1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$g_1 = [f, g],$$

$$g_2 = [g_1, g] = [[f, g], g],$$

$$g_3 = [g_2, g] = [[[f, g], g], g], \dots \quad (\text{avec } x_1 \text{ et } x_2 \in \mathbb{R}).$$