

## Master AG2i

Epreuves de Tronc Commun 1ère session, 13 décembre 2006

Cours “Outils pour le Non Linéaire” (J.-P. Richard)

(documents personnels autorisés)

### Premier problème

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , caractériser les propriétés d'équilibre des trois systèmes :

$$\dot{x} = -x \cos x, \quad (1)$$

$$\dot{x} = x^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

$$\dot{x} = x + x^2. \quad (3)$$

### Deuxième problème

Etudier les propriétés de convergence du système suivant (dans  $\mathbb{R}^2$ ) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2, \\ \dot{x}_2 = |x_1| - x_2. \end{cases} \quad (4)$$

### Troisième problème

Etudier les propriétés de convergence du système suivant (dans  $\mathbb{R}^2$ ) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1^2 x_2. \end{cases} \quad (5)$$

### Quatrième problème

Etudier les propriétés de convergence du système suivant (dans  $\mathbb{R}^3$ ) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 - 2x_3. \end{cases} \quad (6)$$

### Cinquième problème

On considère la suite des crochets de Lie :  $\{g, g_1, g_2, g_3, g_4, \dots\}$  pour :

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sin x_1 \\ \cos x_1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \quad (7)$$

$$g_1 = [f, g],$$

$$g_2 = [g_1, g] = [[f, g], g],$$

$$g_3 = [g_2, g] = [[[f, g], g], g], \dots$$

Quel est le rang de cette suite ou, autrement dit, combien de vecteurs indépendants peut-on en extraire ?