

## Master AG2I, USTL-EC Lille

Epreuve de Tronc Commun 1ère session, 10 décembre 2008

J.-P. Richard (documents personnels autorisés)

### Premier problème

Caractériser précisément les propriétés de stabilité des systèmes suivants :

$$\dot{x} = x - x^3, \quad (1)$$

$$\dot{x} = -|x|, \quad (2)$$

$$\dot{x} = x^2(1 - x). \quad (3)$$

### Deuxième problème

On considère le système (4), où  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \sin^2 x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 \cos^2 x_1 - 2x_2 + 2x_2^2. \end{cases} \quad (4)$$

1) Etudier les propriétés de l'équilibre  $x_e = 0$ .

2) Montrer qu'il n'y a pas d'autre équilibre.

### Troisième problème

Montrer que  $i^i \in \mathbf{R}$  (ce qui n'est plus une surprise...)<sup>1</sup>.

### Quatrième problème

Etudier les propriétés asymptotiques de (5) et donner un dessin résumé dans le plan  $\mathbf{R}^2$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2. \end{cases} \quad (5)$$

(TSVP)

---

<sup>1</sup>Bien sur, ici  $i$  est le “nombre impossible” inventé au XVI<sup>e</sup> siècle notamment par l'Italien Jérôme Cardan, également médecin, philosophe, inventeur de la rotule qui porte son nom (le joint de Cardan), mais aussi joueur invétéré devenu un des premiers statisticiens (il avait constaté la loi des grands nombres en jouant aux ds). Bref,  $i$  est ici la racine carrée de  $-1$ , soit  $i^2 = -1$ , et fut plus tard appelé “imaginaire” .

### Cinquième problème

*Quelques définitions :* on considère l'algèbre de Lie  $\mathcal{A}$  formée par l'ensemble des champs de vecteurs analytiques de dimension  $n$  – soit  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n)$  – muni de l'addition  $+$  et du produit  $[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$  (crochet de Lie). Pour un système donné  $\dot{x} = f(x) + g(x)$ , on peut construire  $\mathcal{A}_{(f,g)}$ , la plus petite sous-algèbre contenant le champ  $g$  ( $h \in \mathcal{A}_{(f,g)}$ ) et invariante par la fonction vectorielle  $f$  (c'est-à-dire :  $\forall h \in \mathcal{A}_{(f,g)}, [f, h] \in \mathcal{A}_{(f,g)}$ ). Pour un vecteur  $x \in \mathbf{R}^n$ , on construit ensuite le sous-espace vectoriel  $A_{(f,g)}(x) \subset \mathbf{R}^n$  engendré par les vecteurs  $h(x)$  pour tous les  $h \in \mathcal{A}_{(f,g)}$ . Si cet espace vectoriel est de dimension  $n$  quelque soit  $x$ , alors le système  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  est dit “fortement accessible”, ce qui traduit une certaine propriété de commandabilité.

On considère ici le cas  $x \in \mathbf{R}^3$  et :

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma(x) \end{pmatrix}.$$

- 1) Pour  $\gamma = cte$ , à quelle condition le système est-il fortement accessible ?
- 2) Pour  $\gamma = \gamma(x)$ , à quelle condition le système est-il fortement accessible ?