

Master AG2i, USTL-EC Lille

Epreuves de Tronc Commun, 9 décembre 2009

J.-P. Richard, documents personnels autorisés

Premier problème

Caractériser (précisément) les propriétés de $x = 0 \in \mathbb{R}$ pour les systèmes suivants :

$$\ddot{x} = 0, \quad (1)$$

$$\dot{x} = 1 - e^x, \quad (2)$$

$$\dot{x} = -6x + 5x^2 - x^3, \quad (3)$$

(attention : dans le système (1), c'est bien une dérivée seconde).

Deuxième problème

Etudier les propriétés de convergence du système (4) suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2^2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2, \end{cases} \quad (4)$$

et donner un résumé sous forme de dessin dans le plan (x_1, x_2) .

Troisième problème

On considère le système (5) ci-dessous, d'entrée u et d'état x :

$$\dot{x} = f(x) + gu = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1x_2 + u \\ -x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

1) Pour $u = 0$, caractériser les propriétés de stabilité de $x = 0$.

2) Proposer une commande u telle que $x = 0$ soit globalement asymptotiquement stable.

3) Calculer les crochets de Lie $g_1 = [f, g]$, $g_2 = [f, [f, g]]$, $g_3 = [f, [f, [f, g]]]$, puis calculer le rang de (g, g_1, g_2, g_3) au point $x = 0$.