

Master SMaRT

Examen de “Systèmes Dynamiques”, 18 janvier 2012

J.-P. Richard (documents personnels autorisés)

Problème 1

On considère le système suivant :

(Consider the following system:)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 \sin x_2 + x_2 \cos x_1, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2. \end{cases} \quad (1)$$

- 1) Caractériser précisément les propriétés du point $x = 0$.
- 2) Etudier plus généralement les propriétés de stabilité du système (1).

- 1) Characterize precisely the properties of the point $x = 0$.*
- 2) More generally, analyze the stability properties of the system(1).*

Problème 2

On considère le modèle suivant d'un pendule sans frottement :

(It is considered the following model of a friction-free pendulum:)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1. \end{cases} \quad (2)$$

On rappelle que l'énergie totale (énergie potentielle + énergie cinétique) du pendule est donnée par:

(It is recalled that the total energy of the pendulum is:)

$$a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

- 1) Calculer le (ou les) point(s) d'équilibre.
- 2) Proposer une fonction candidate à Lyapunov. Etudier la stabilité.
- 3) Que se passe-t-il si on ajoute un couple de frottement fluide (proportionnel à la vitesse x_2) ?

- 1) *Compute the equilibrium point(s).*
- 2) *Propose a candidate Lyapunov function. Check the stability.*
- 3) *What happens if a linear friction torque is added (i.e. a torque proportional to the speed x_2)?*

Problème 3

On considère le système à retard suivant, où k est une constante scalaire et h , une constante scalaire positive :

(Consider the following delay system, where k is a constant scalar and h a positive constant scalar:)

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = -kx(t - h). \quad (3)$$

Etudier ses propriétés de stabilité par la méthode de Walton et Marshall.

(Study its stability properties by using the method of Walton and Marshall.)