

Contribution à la commande robuste des systèmes à échantillonnage variable ou contrôlé

Christophe Fiter

Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (CNRS UMR 8219)
École Centrale de Lille, France

Directeur de thèse: Professeur **Jean-Pierre Richard** - EC Lille
Co-directeur de thèse: Professeur **Wilfrid Perruquetti** - EC Lille
Co-encadrant de thèse: Chargé de Recherche CNRS **Laurentiu Hetel** - EC Lille



Conseil régional
Nord-Pas de Calais



25/09/2012

Plan

Introduction

Système LTI idéal

Système LTI perturbé

Système LTI perturbé et à retard - stabilisation

Conclusion et perspectives

Plan

Introduction

Système LTI idéal

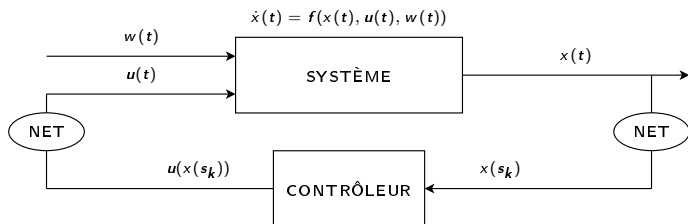
Système LTI perturbé

Système LTI perturbé et à retard - stabilisation

Conclusion et perspectives

Introduction

Cadre de travail : systèmes échantillonnés



- ▶ Intéressant pour : systèmes embarqués et/ou commandés en réseau
- ▶ Défi actuel : réduction de la quantité d'information échangée

Applications (Anta, 2011)

Systèmes temps-réel :

- ▶ Un seul microprocesseur pour plusieurs tâches
- ▶ Capacité microprocesseur limitée
- ▶ Fortes contraintes sur l'ordonnanceur temps-réel

⇒ Réduire la charge processeur



Applications (Anta, 2011)

Systèmes distribués :

- ▶ Partage d'un réseau de communication
- ▶ Bande passante limitée
- ▶ Fortes contraintes sur l'ordonnanceur

⇒ Réduire l'utilisation de bande passante



Applications (Anta, 2011)

Systèmes d'irrigation

- ▶ Commande implémentée sur des noeuds sans fil
- ▶ Réseaux d'irrigation couvrent jusqu'à 7000km^2
- ▶ Remplacer les batteries : cher et prend du temps

⇒ Réduire la consommation d'énergie



Partage de ressources

En pratique, partager des ressources limitées
(processeur et/ou réseau)



Variations du pas d'échantillonnage



Possible effet déstabilisant

Effets de la gigue d'échantillonnage (Zhang, 2001)

On considère le système échantillonné

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ u(t) &= -Kx(s_k)\end{aligned}$$

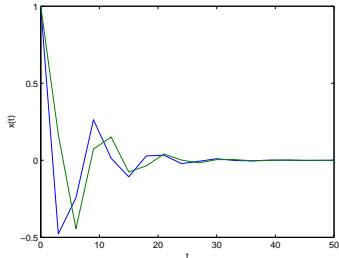
avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad K = [-1 \quad 0]$$

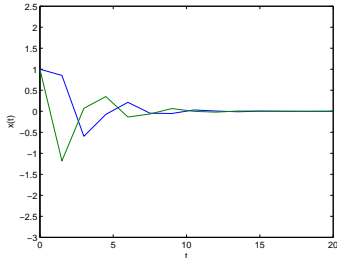
Effets de la gigue d'échantillonnage (Zhang, 2001)

Pas d'échantillonnage constant

$$T = T_1 = 3s \text{ ou } T = T_2 = 1.5s$$

 \Rightarrow STABLE

$$T = T_1 = 3s$$

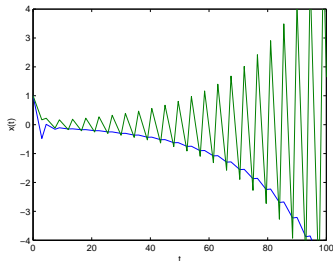


$$T = T_2 = 1.5s$$

Effets de la gigue d'échantillonnage (Zhang, 2001)

Séquence d'échantillonnage périodique

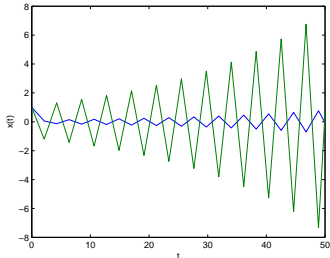
$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots, \text{ avec } T_1 = 3s, T_2 = 1.5s \\ \Rightarrow \text{INSTABLE!}$$



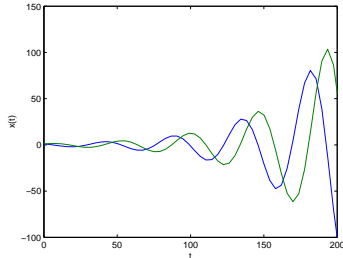
$$T = 3s \rightarrow 1.5s \rightarrow 3s \rightarrow 1.5s \rightarrow \dots$$

Effets de la gigue d'échantillonnage (Zhang, 2001)

Pas d'échantillonnage constant
 $T = T_1 = 2.13s$ ou $T = T_2 = 3.95s$
 \Rightarrow **INSTABLE**



$T = T_1 = 2.13s$

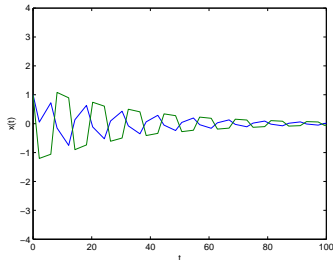


$T = T_2 = 3.95s$

Effets de la gigue d'échantillonnage (Zhang, 2001)

Séquence d'échantillonnage périodique

$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots, \text{ avec } T_1 = 2.13s, T_2 = 3.95s$$

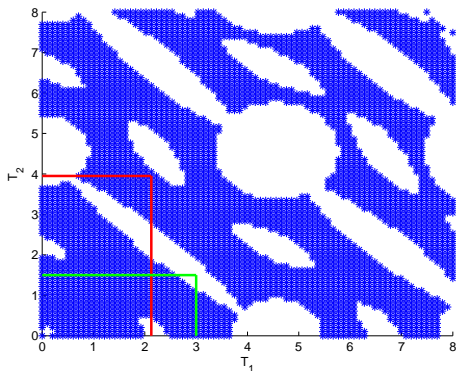
$$\Rightarrow \text{STABLE!}$$


$$T = 2.13s \rightarrow 3.95s \rightarrow 2.13s \rightarrow 3.95s \rightarrow \dots$$

Effets de la gigue d'échantillonnage (Zhang, 2001)

Domaine de stabilité (pas d'échantillonnage admissibles, en bleu)
pour une séquence d'échantillonnage périodique

$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots$$



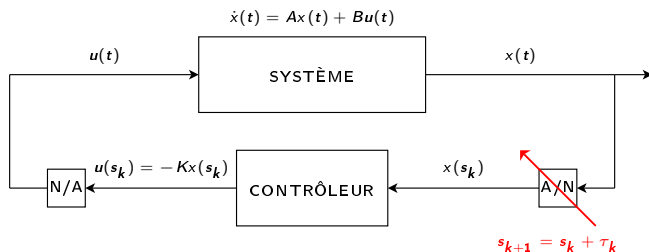
Question

Comment réduire la charge processeur et/ou réseau tout en assurant la stabilité du système ?

Axes de recherche

2 approches principales :

- Analyse de stabilité robuste pour les systèmes à pas d'échantillonnage variable



Pas d'échantillonnage variable $\tau_k \in [0, \tau^*]$

Axes de recherche

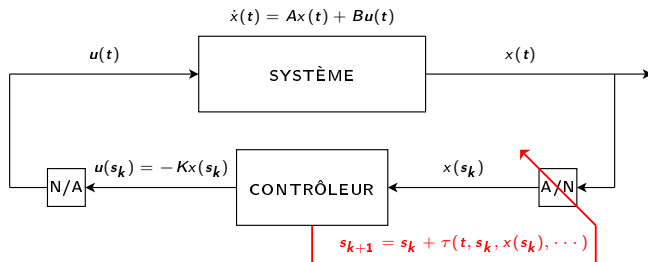
Analyse de stabilité robuste pour les systèmes à pas d'échantillonnage variable

- ▶ Approches par systèmes à retard
 - Fridman, Seuret, Richard - Automatica 2004
 - Fridman - Automatica 2010
 - Seuret - Automatica 2012
- ▶ Approches par petit gain
 - Mirkin - IEEE TAC 2007
 - Fujioka - Automatica 2009
- ▶ Approches par enveloppes convexes
 - Hetel, Daafouz, lung - IEEE TAC 2006
 - Hetel, Kruszewski, Perruquetti, Richard - IEEE TAC 2011

Axes de recherche

2 approches principales :

- ▶ Analyse de stabilité robuste pour les systèmes à pas d'échantillonnage variable
- ▶ **Contrôle dynamique du pas d'échantillonnage**



- **Contrôle Event-Triggered** : Information envoyée lorsque certains évènements se produisent (capteurs intelligents)

Axes de recherche

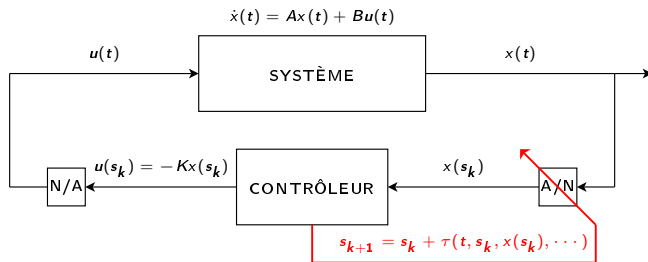
Contrôle Event-Triggered

- ▶ Cervin, Aström - IEEE CDC 2007
- ▶ Tabuada - IEEE TAC 2007
- ▶ Lunze, Lehmann - Automatica 2010
- ▶ Heemels, Sandee, Van Bosch - IJC 2008
- ▶ Velasco, Marti, Bini - IEEE CDC 2009

Axes de recherche

2 approches principales :

- ▶ Analyse de stabilité robuste pour les systèmes à pas d'échantillonnage variable
- ▶ **Contrôle dynamique du pas d'échantillonnage**



- **Contrôle Event-Triggered** : Information envoyée lorsque certains évènements se produisent (capteurs intelligents)
- **Contrôle Self-Triggered** : Émule le contrôle event-triggered sans hardware dédié

Axes de recherche

Contrôle Self-Triggered

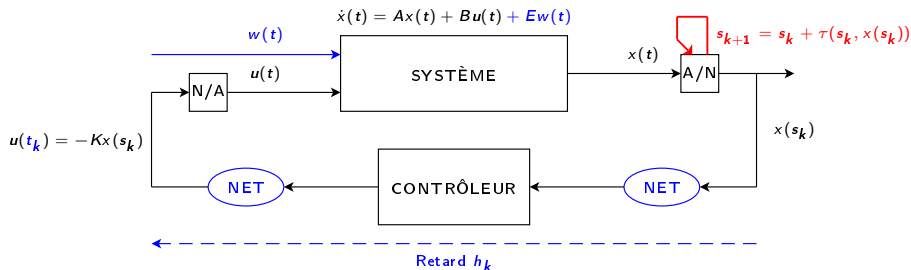
- ▶ Wang, Lemmon - IEEE TAC 2009
- ▶ Wang, Lemmon - IEEE TAC 2010
- ▶ Anta, Tabuada - IEEE TAC 2010
- ▶ Mazo-Jr, Anta, Tabuada - Automatica 2010

Avantages et inconvénients de chaque approche

	Robuste	Event	Self	Objectifs
Calcul de la fonction de Lyapunov adéquate	+	-	-	+
Optimisation du pas d'échantillonnage dans le pire des cas	+	-	-	+
Calculs hors-ligne	+	-	-	+
Pas de hardware dédié (capteur et/ou actionneur intelligent)	+	-	+	+
Estimation par valeur inférieure du prochain pas d'échantillonnage maximal admissible	-	-	+	+
Conditions dépendantes de l'état	-	+	+	+
Contrôle du pas d'échantillonnage	-	+	+	+

Objectifs

Contrôle dynamique de l'échantillonnage dans le cas perturbé et à retard



Conception hors ligne d'une fonction d'échantillonnage maximal

$\tau_{\max} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $s_{k+1} - s_k = \tau(s_k, x(s_k)) \in [\tau^-, \tau_{\max}(x(s_k))]$

Perturbation inconnue $w(t)$

Retard variable $h_k = t_k - s_k$

Plan

Introduction

Système LTI idéal

Système LTI perturbé

Système LTI perturbé et à retard - stabilisation

Conclusion et perspectives

Description du système

On considère le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \forall t \in \mathbb{R}_+$$

avec la commande échantillonnée

$$u(t) = -Kx(s_k), \forall t \in [s_k, s_{k+1}),$$

et les pas d'échantillonnage définis par

$$s_{k+1} - s_k = \tau(s_k, x(s_k)) \in (0, \tau_{\max}(x(s_k))), \forall k \in \mathbb{N},$$

avec une fonction d'échantillonnage maximale dépendant de l'état

$\tau_{\max} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, et une fonction d'échantillonnage

$\tau : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Description du système

On considère le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \forall t \in \mathbb{R}_+$$

avec la commande échantillonnée

$$u(t) = -Kx(s_k), \forall t \in [s_k, s_{k+1}),$$

et les pas d'échantillonnage définis par

$$s_{k+1} - s_k = \tau(s_k, x(s_k)) \in (0, \tau_{\max}(x(s_k))), \forall k \in \mathbb{N},$$

avec une **fonction d'échantillonnage maximale dépendant de l'état**

$\tau_{\max} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, et une fonction d'échantillonnage

$\tau : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Conditions de stabilité ?

Objectif : Conception d'une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état qui élargit le pas d'échantillonnage...

D'accord, mais **sous quelles conditions de stabilité?**

↪ Conditions de stabilité au sens de Lyapunov : (IFAC WC'11, JDMACS'11)

Stabilité asymptotique : $\dot{V}(x) < 0$ le long des trajectoires

Stabilité exponentielle : $\dot{V}(x) + 2\beta V(x) \leq 0$ le long des trajectoires

↪ Conditions de stabilité au sens de Lyapunov-Razumikhin : (Automatica'12)

Stabilité asymptotique : pas nécessaire de vérifier $\dot{V}(x) < 0$ tout le temps, mais seulement lorsque l'on s'éloigne d'un certain voisinage de l'origine \Rightarrow **moins conservatif!**

Stabilité exponentielle : ?

Conditions de stabilité ?

Objectif : Conception d'une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état qui élargit le pas d'échantillonnage...

D'accord, mais sous quelles conditions de stabilité?

↪ Conditions de stabilité au sens de Lyapunov : (IFAC WC'11, JDMACS'11)

Stabilité asymptotique : $\dot{V}(x) < 0$ le long des trajectoires

Stabilité exponentielle : $\dot{V}(x) + 2\beta V(x) \leq 0$ le long des trajectoires

↪ Conditions de stabilité au sens de Lyapunov-Razumikhin : (Automatica'12)

Stabilité asymptotique : pas nécessaire de vérifier $\dot{V}(x) < 0$ tout le temps, mais seulement lorsque l'on s'éloigne d'un certain voisinage de l'origine ⇒ moins conservatif!

Stabilité exponentielle : ?

Conditions de stabilité ?

Objectif : Conception d'une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état qui élargit le pas d'échantillonnage...

D'accord, mais sous quelles conditions de stabilité?

↪ Conditions de stabilité au sens de Lyapunov : (IFAC WC'11, JDMACS'11)

Stabilité asymptotique : $\dot{V}(x) < 0$ le long des trajectoires

Stabilité exponentielle : $\dot{V}(x) + 2\beta V(x) \leq 0$ le long des trajectoires

↪ Conditions de stabilité au sens de Lyapunov-Razumikhin : (Automatica'12)

Stabilité asymptotique : pas nécessaire de vérifier $\dot{V}(x) < 0$ tout le temps, mais seulement lorsque l'on s'éloigne d'un certain voisinage de l'origine \Rightarrow moins conservatif!

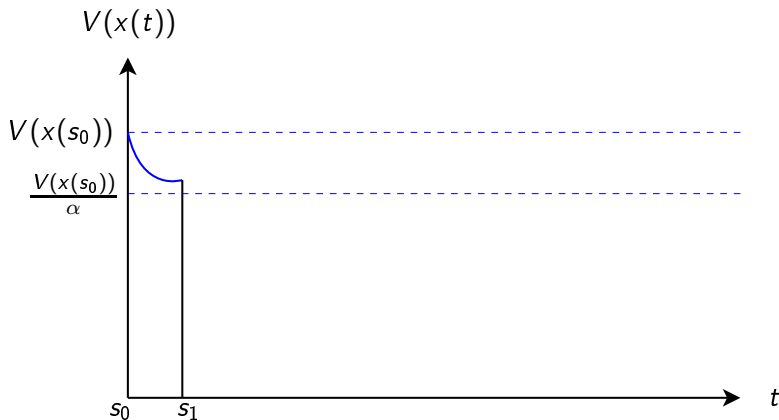
Stabilité exponentielle : ?

Stabilité de Lyapunov-Razumikhin pour systèmes échantillonnés

Condition de stabilité asymptotique :

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \text{ dès que } V(x(t)) \geq \frac{V(x(s_k))}{\alpha}$$

\rightsquigarrow Échantillonner dès que la condition n'est plus satisfaite

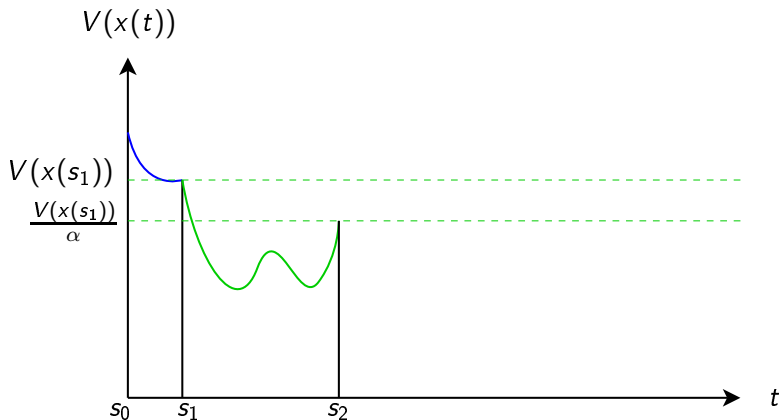


Stabilité de Lyapunov-Razumikhin pour systèmes échantillonnés

Condition de stabilité asymptotique :

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \text{ dès que } V(x(t)) \geq \frac{V(x(s_k))}{\alpha}$$

\rightsquigarrow Échantillonner dès que la condition n'est plus satisfaite

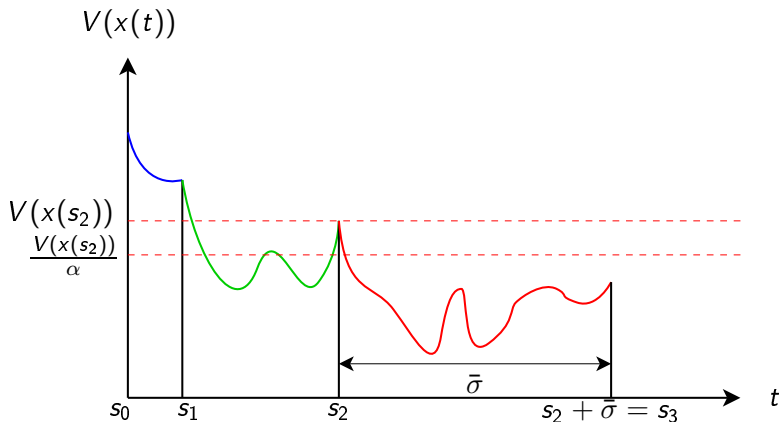


Stabilité de Lyapunov-Razumikhin pour systèmes échantillonnés

Condition de stabilité asymptotique :

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \text{ dès que } V(x(t)) \geq \frac{V(x(s_k))}{\alpha}$$

\rightsquigarrow Échantillonner dès que la condition n'est plus satisfaite

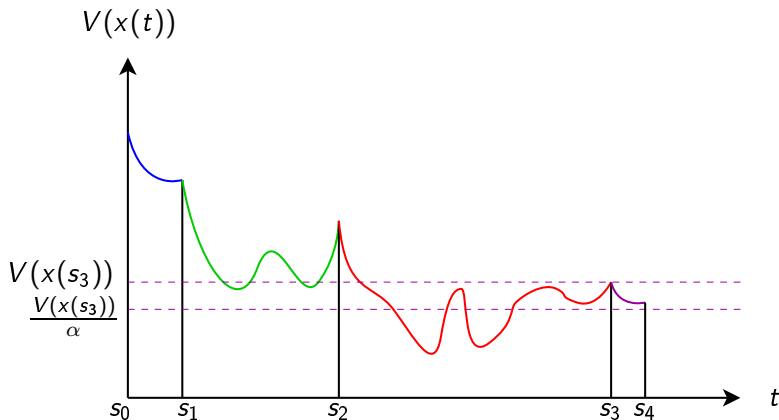


Stabilité de Lyapunov-Razumikhin pour systèmes échantillonnés

Condition de stabilité asymptotique :

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \text{ dès que } V(x(t)) \geq \frac{V(x(s_k))}{\alpha}$$

\rightsquigarrow Échantillonner dès que la condition n'est plus satisfaite

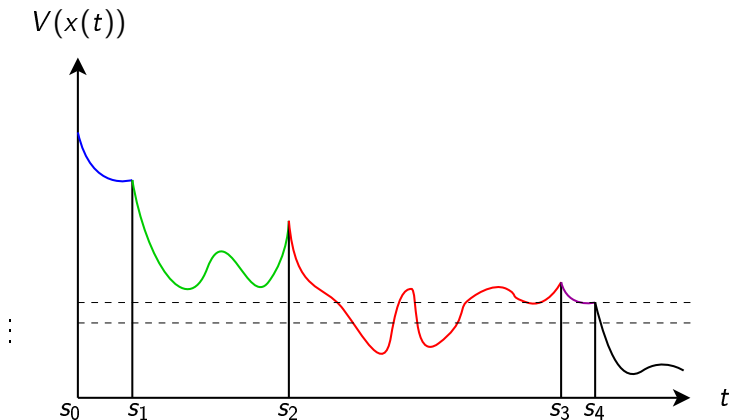


Stabilité de Lyapunov-Razumikhin pour systèmes échantillonnés

Condition de stabilité asymptotique :

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \text{ dès que } V(x(t)) \geq \frac{V(x(s_k))}{\alpha}$$

\rightsquigarrow Échantillonner dès que la condition n'est plus satisfaite



Conditions de stabilité exponentielle de type Lyapunov-Razumikhin

Théorème : Conditions de β -stabilité de type Lyapunov-Razumikhin pour les systèmes échantillonnés (Automatica'12) :

On considère une fonction $\tau_{\max} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\|\tau_{\max}\|_{\infty} \leq \bar{\sigma}$.

S'il existe une fonction de Lyapunov candidate $V(x) = x^T P x$ telle que

$$\dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) \leq 0 \text{ dès que } V(x(t)) \geq \frac{V(x(s_k))}{\alpha},$$

le long des trajectoires, alors le système est globalement β -stable.

(avec $\alpha > 1$, $\bar{\sigma} > 0$, et $0 < \beta \leq \frac{\ln(\alpha)}{2\bar{\sigma}}$)

Formulation du problème

Les problèmes que nous voulons résoudre sont :

- ▶ Trouver une LRF $V(x) = x^T P x$ qui garantit une borne inférieure $\tau^* = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \tau_{\max}(x)$ maximale de la fonction d'échantillonnage
- ▶ Pour une LRF $V(x) = x^T P x$ donnée, calculer une estimation de la fonction d'échantillonnage optimale $\max \tau_{\max}(x)$

Formulation du problème

Les problèmes que nous voulons résoudre sont :

- ▶ Trouver une LRF $V(x) = x^T P x$ qui garantit une borne inférieure $\tau^* = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \tau_{\max}(x)$ maximale de la fonction d'échantillonnage
- ▶ Pour une LRF $V(x) = x^T P x$ donnée, calculer une estimation de la fonction d'échantillonnage optimale $\max \tau_{\max}(x)$

Conditions de β -stabilité préliminaires

Lemme : Un nombre infini de conditions de β -stabilité

On considère une fonction $\tau_{\max} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\|\tau_{\max}\|_{\infty} \leq \bar{\sigma}$.

Le système est globalement β -stable s'il existe $P \succ 0$, $\varepsilon \geq 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in [0, \tau_{\max}(x)]$,

$$x^T \Phi(\sigma) x \leq 0,$$

avec

$$\Phi(\sigma) = \begin{bmatrix} \Lambda(\sigma) \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + \varepsilon \alpha P + 2\beta P & -PBK \\ * & -\varepsilon P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda(\sigma) \\ I \end{bmatrix},$$

et la matrice d'évolution du système ($x(t) = \Lambda(\sigma)x(s_k)$,
 $t = s_k + \sigma$)

$$\Lambda(\sigma) = I + \int_0^{\sigma} e^{sA} ds (A - BK).$$

(avec $\alpha > 1$, $\bar{\sigma} > 0$, et $0 < \beta \leq \frac{\ln(\alpha)}{2\bar{\sigma}}$)

Une méthode pour obtenir un nombre fini de conditions

Il existe **un nombre infini de conditions de stabilité** à vérifier :

$$x^T \Phi(\sigma) x \leq 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \text{ et } \sigma \in [0, \tau_{\max}(x)].$$

⇒ Pour obtenir des conditions de stabilité numériquement vérifiables, on utilise :

- ▶ Une discrétisation de l'espace d'état,
- ▶ Une enveloppe convexe suivant le temps

Une méthode pour obtenir un nombre fini de conditions

Il existe **un nombre infini de conditions de stabilité** à vérifier :

$$x^T \Phi(\sigma) x \leq 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \text{ et } \sigma \in [0, \tau_{\max}(x)].$$

\Rightarrow Pour obtenir des conditions de stabilité numériquement vérifiables, on utilise :

- ▶ Une discrétisation de l'espace d'état,
- ▶ Une enveloppe convexe suivant le temps

Une méthode pour obtenir un nombre fini de conditions

Il existe **un nombre infini de conditions de stabilité** à vérifier :

$$x^T \Phi(\sigma) x \leq 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \text{ et } \sigma \in [0, \tau_{\max}(x)].$$

⇒ Pour obtenir des conditions de stabilité numériquement vérifiables, on utilise :

- ▶ **Une discrétisation de l'espace d'état,**
- ▶ Une enveloppe convexe suivant le temps

Une méthode pour obtenir un nombre fini de conditions

Il existe **un nombre infini de conditions de stabilité** à vérifier :

$$x^T \Phi(\sigma)x \leq 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \text{ et } \sigma \in [0, \tau_{\max}(x)].$$

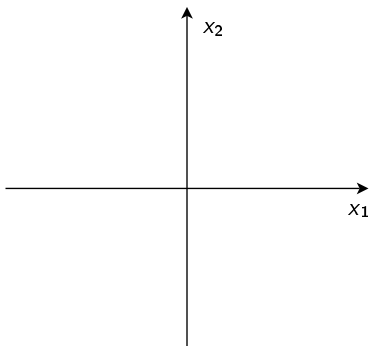
\Rightarrow Pour obtenir des conditions de stabilité numériquement vérifiables, on utilise :

- ▶ **Une discrétisation de l'espace d'état,**
- ▶ **Une enveloppe convexe suivant le temps**

Discrétisation de l'espace d'état

Idée principale :

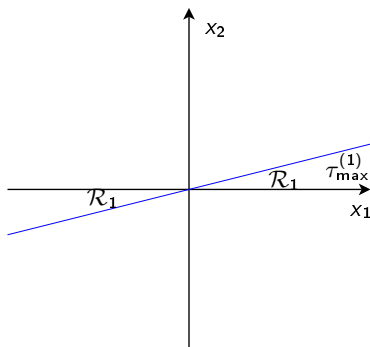
- ▶ On recouvre l'espace d'état par un nombre fini de régions coniques \mathcal{R}_s .
- ▶ On associe un pas d'échantillonnage maximal $\tau_{\max}^{(s)}$ à chaque région : $\tau_{\max}(x) = \tau_{\max}^{(s)}$ pour tout $x \in \mathcal{R}_s$.



Discrétisation de l'espace d'état

Idée principale :

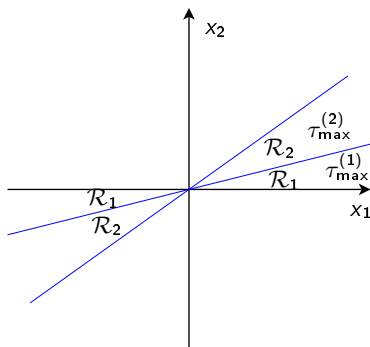
- ▶ On recouvre l'espace d'état par un nombre fini de régions coniques \mathcal{R}_s .
- ▶ On associe un pas d'échantillonnage maximal $\tau_{\max}^{(s)}$ à chaque région : $\tau_{\max}(x) = \tau_{\max}^{(s)}$ pour tout $x \in \mathcal{R}_s$.



Discrétisation de l'espace d'état

Idée principale :

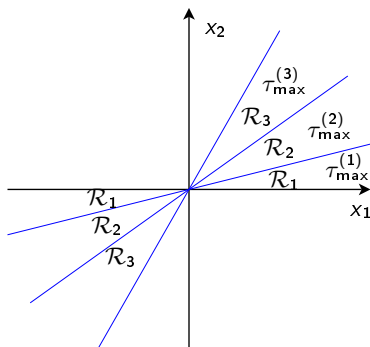
- ▶ On recouvre l'espace d'état par un nombre fini de régions coniques \mathcal{R}_s .
- ▶ On associe un pas d'échantillonnage maximal $\tau_{\max}^{(s)}$ à chaque région : $\tau_{\max}(x) = \tau_{\max}^{(s)}$ pour tout $x \in \mathcal{R}_s$.



Discrétisation de l'espace d'état

Idée principale :

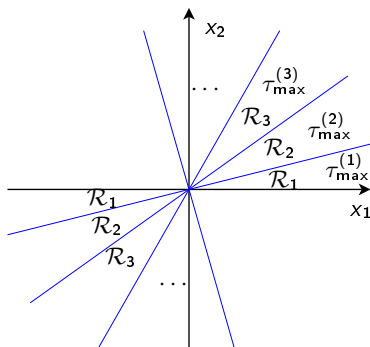
- ▶ On recouvre l'espace d'état par un nombre fini de régions coniques \mathcal{R}_s .
- ▶ On associe un pas d'échantillonnage maximal $\tau_{\max}^{(s)}$ à chaque région : $\tau_{\max}(x) = \tau_{\max}^{(s)}$ pour tout $x \in \mathcal{R}_s$.



Discrétisation de l'espace d'état

Idée principale :

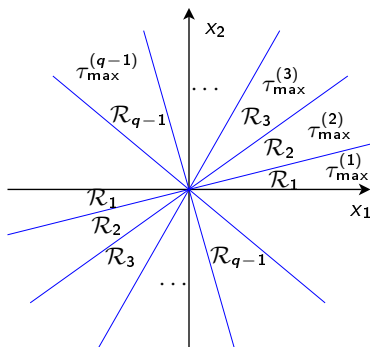
- ▶ On recouvre l'espace d'état par un nombre fini de régions coniques \mathcal{R}_s .
- ▶ On associe un pas d'échantillonnage maximal $\tau_{\max}^{(s)}$ à chaque région : $\tau_{\max}(x) = \tau_{\max}^{(s)}$ pour tout $x \in \mathcal{R}_s$.



Discrétisation de l'espace d'état

Idée principale :

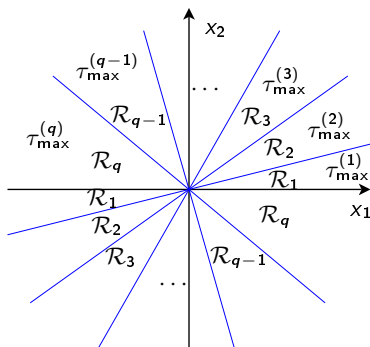
- ▶ On recouvre l'espace d'état par un nombre fini de régions coniques \mathcal{R}_s .
- ▶ On associe un pas d'échantillonnage maximal $\tau_{\max}^{(s)}$ à chaque région : $\tau_{\max}(x) = \tau_{\max}^{(s)}$ pour tout $x \in \mathcal{R}_s$.



Discrétisation de l'espace d'état

Idée principale :

- ▶ On recouvre l'espace d'état par un nombre fini de régions coniques \mathcal{R}_s .
- ▶ On associe un pas d'échantillonnage maximal $\tau_{\max}^{(s)}$ à chaque région : $\tau_{\max}(x) = \tau_{\max}^{(s)}$ pour tout $x \in \mathcal{R}_s$.



Discrétisation de l'espace d'état

2 constructions possibles :

- ▶ **Recouvrement isotropique** : Construction basée sur les coordonnées sphériques de l'état : $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$
- ▶ **Recouvrement anisotropique** : Construction basée sur l'équation de stabilité de Lyapunov en temps discret

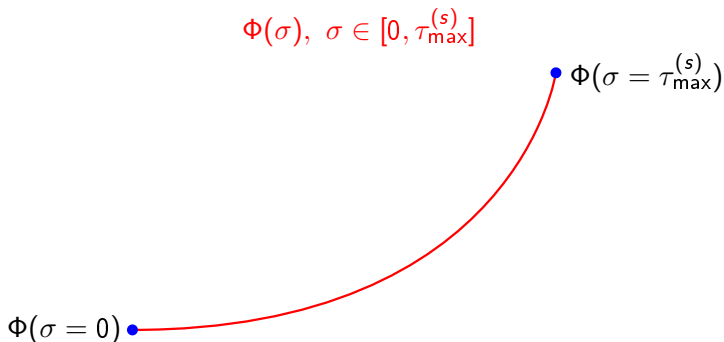
Discrétisation de l'espace d'état

2 constructions possibles :

- ▶ **Recouvrement isotropique** : Construction basée sur les coordonnées sphériques de l'état : $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$
- ▶ **Recouvrement anisotropique** : Construction basée sur l'équation de stabilité de Lyapunov en temps discret

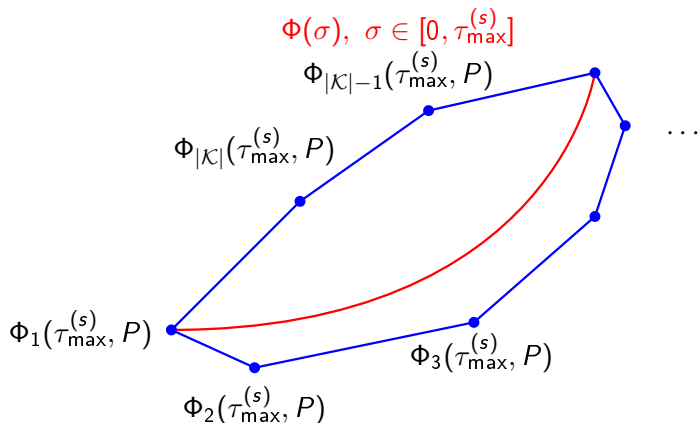
Enveloppe convexe suivant le temps

Idée principale : Envelopper l'évolution de la fonction matricielle Φ dans un polytope convexe



Enveloppe convexe suivant le temps

Idée principale : Envelopper l'évolution de la fonction matricielle Φ dans un polytope convexe



Enveloppe convexe suivant le temps

Approche de convexification pour construire les sommets $\Phi_{\kappa}(\tau_{\max}^{(s)}, P)$ du polytope adaptée des résultats de [Hetel, Daafouz, lung, IEEE TAC 2006](#), qui sont basés sur des approximations polynomiales

Théorème principal - pas d'échantillonnage variable

Théorème principal (Automatica'12)

S'il existe $P^* \succ 0$ et $\varepsilon \geq 0$ tels que le nombre fini de LMIs

$$\Phi_{\kappa}(\tau^*, P^*) \preceq 0$$

est satisfait, alors le système est globalement β -stable pour tout pas d'échantillonnage variable majoré par τ^* .

(avec $\alpha > 1$, $\bar{\sigma} > 0$ et $0 < \beta \leq \frac{\ln(\alpha)}{2\bar{\sigma}}$)

Théorème principal - échantillonnage dépendant de l'état

Théorème principal (Automatica'12)

S'il existe des scalaires $\varepsilon_{\kappa}^{(s)} \geq 0$ tels que le nombre fini de LMIs

$$\Phi_{\kappa}(\mathcal{T}_{\max}^{(s)}, P^*) + \varepsilon_{\kappa}^{(s)} Q_s \preceq 0$$

est satisfait, alors le système est **globalement β -stable**.

(avec $P^* \succ 0$, $\varepsilon \geq 0$, $\alpha > 1$, $\bar{\sigma} > 0$ et $0 < \beta \leq \frac{\ln(\alpha)}{2\bar{\sigma}}$)

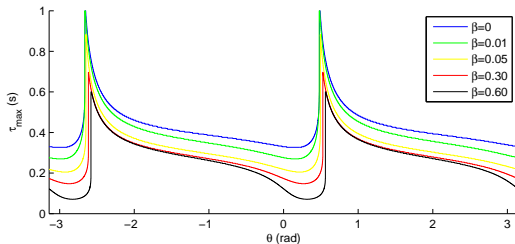
Exemple 1

On considère le système de [Hetel, Kruszewski, Perruquetti, Richard - IEEE TAC 2011](#) :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -3.5 \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} Kx(s_k),$$
$$K = \begin{bmatrix} -1.02 & 5.62 \end{bmatrix}.$$

Exemple 1 - Fonctions d'échantillonnage dépendant de l'état

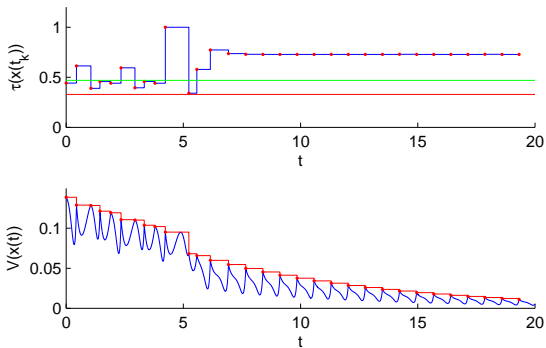
Fonctions d'échantillonnage dépendant de l'état pour différents taux de décroissance exponentielle β



Dans certaines régions de l'espace d'état, on peut échantillonner au delà de la limite d'échantillonnage constant $T_{\text{const}}^{\max} = 0.47s$.

Exemple 1 - Résultats de simulation pour $\beta = 0$

- ▶ Pas d'échantillonnage $\tau_{\max}(x(s_k))$,
- ▶ Fonction de Lyapunov-Razumikhin $V(x) = x^T P x$.



$$T_{\text{moyen}} = 155\% T_{\text{const}}^{\max} !$$

Exemple 1 - Bornes maximales pour un pas d'échantillonnage variable

Comparaison :

- ▶ borne inférieure τ^* de la fonction d'échantillonnage obtenue (pour $\beta = 0$),
- ▶ bornes maximales obtenues dans de récents papiers sur les systèmes à pas d'échantillonnage variable.

Pas d'échantillonnage constant	
Naghshtabrizi, Hespanha, Teel - S&CL 2008	$\tau^* = 0.212$
Seuret - CDC 2009	$\tau^* = 0.308$
Pas d'échantillonnage variable	
Naghshtabrizi, Hespanha, Teel - S&CL 2008	$\tau^* = 0.165$
Seuret - CDC 2009	$\tau^* = 0.198$
Fujioka - Automatica 2009	$\tau^* = 0.204$
Fridman - Automatica 2010	$\tau^* = 0.259$
Notre Théorème principal avec $\beta = 0$	$\tau^* = 0.329$

Exemple 2

On considère le système de réacteur chimique de [Mazo, Anta, Tabuada - ECC 2009](#) :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1.38 & -0.20 & 6.71 & -5.67 \\ -0.58 & -4.29 & 0 & 0.67 \\ 1.06 & 4.27 & -6.65 & 5.89 \\ 0.04 & 4.27 & 1.34 & -2.10 \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5.67 & 0 \\ 1.13 & -3.14 \\ 1.13 & 0 \end{bmatrix} Kx(s_k),$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.1006 & 0.2469 & 0.0952 & 0.2447 \\ -1.4099 & 0.1966 & -0.0139 & -0.0823 \end{bmatrix}.$$

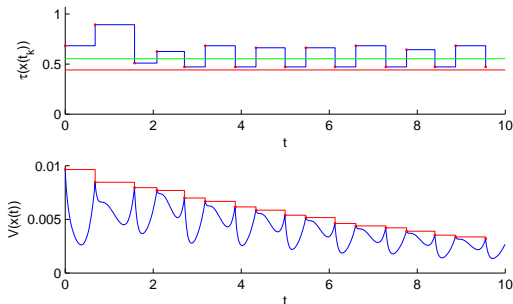
Exemple 2 - Fonctions d'échantillonnage dépendant de l'état

Fonctions d'échantillonnage dépendant de l'état pour $\beta = 0$ avec un recouvrement de l'espace d'état à...

- ▶ 5 régions coniques
- ▶ 10 régions coniques
- ▶ 30 régions coniques
- ▶ 100 régions coniques

Exemple 2 - Résultats de simulation pour $\beta = 0$

- ▶ Pas d'échantillonnage $\tau_{\max}(x(s_k))$,
- ▶ Fonction de Lyapunov-Razumikhin $V(x) = x^T P x$.



$T_{\text{average}} = 0.5898s > T_{\text{const}}^{\max} = 0.5534$ - 47% d'échantillons en moins en moyenne que dans Mazo, Anta, Tabuada - ECC 2009

Résumé

Nous avons présenté une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état construite à partir de LMIs, et qui assure la β -stabilité du système, tout en élargissant le pas d'échantillonnage.

Principales contributions et avantages :

- ▶ Nouvelle approche de contrôle dynamique de l'échantillonnage : l'échantillonnage dépendant de l'état
 - Maximise le pas d'échantillonnage minimal τ^*
 - Calcule la fonction de Lyapunov (-Razumikhin)
 - Construction de la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état hors-ligne grâce à une cartographie de l'espace d'état

Résumé

Principales contributions et avantages :

- ▶ Analyse de stabilité basée sur des enveloppes convexes en temps continu
- ▶ Constructions de recouvrements de l'espace d'état utilisés dans la conception de la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état
- ▶ Extension de la théorie de stabilité de Lyapunov-Razumikhin à la stabilité exponentielle des systèmes échantillonnés

Plan

Introduction

Système LTI idéal

Système LTI perturbé

Système LTI perturbé et à retard - stabilisation

Conclusion et perspectives

Description du système

On étend les résultats précédents aux systèmes perturbés

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

avec une perturbation satisfaisant

$$\exists W \geq 0, \|w(t)\|^2 \leq W \|x(s_k)\|^2, \forall t \in [s_k, s_{k+1}), \forall k \in \mathbb{N}$$

Applications

Nous avons montré qu'en utilisant les mêmes outils (enveloppes convexes, recouvrement de l'espace d'état), nous pouvons obtenir pour le cas perturbé (TDS'13 - soumis)

- ▶ une analyse de stabilité robuste pour les systèmes à pas d'échantillonnage variable,
- ▶ un algorithme d'échantillonnage dépendant de l'état,

mais aussi (version Journal à soumettre)

- ▶ un contrôle de type event-triggered,
- ▶ un contrôle de type self-triggered.

Exemple

On considère le système de [Tabuada, IEEE TAC 2007](#) :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \quad 4] x(t_k) + w(t).$$

Exemple - analyse de stabilité robuste vis-à-vis des variations du pas d'échantillonnage

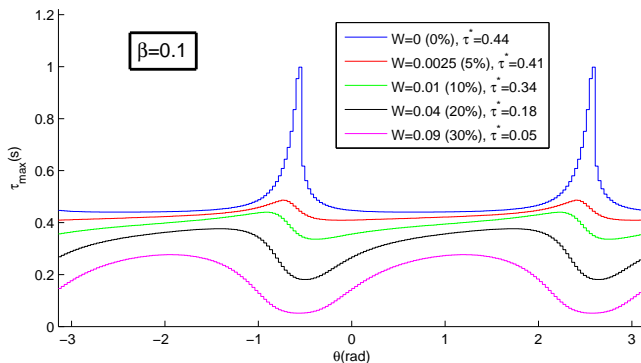
Comparaison de bornes supérieures maximales τ^* pour l'échantillonnage variable dans la littérature (sans perturbations)

	$\beta = 0$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.3$
Naghshtabrizi et al. - S&CL 2008	0.2740s	-	-
Seuret - IEEE CDC 2009	0.3122s	0.2795s	0.1778s
Fujioka - Automatica 2009	0.3316s	-	-
Fridman - Automatica 2010	0.4221s	0.3934s	0.3350s
Notre Théorème	0.5402s	0.4404s	0.3709s

Remarque : avec $\beta = 0$ et $W = 0.01$ (10%), notre théorème donne $\tau^* = 0.4271s$

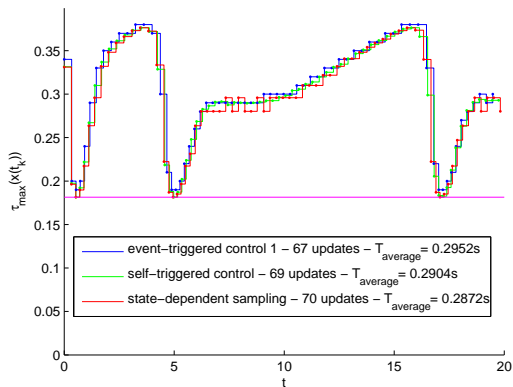
Exemple - fonction d'échantillonnage dépendant de l'état

Fonctions d'échantillonnage dépendant de l'état τ_{\max} pour $\beta = 0.1$, et différentes valeurs de W



Exemple - contrôle dynamique de l'échantillonnage

Contrôle event-triggered, contrôle self-triggered, et échantillonnage dépendant de l'état, pour $\beta = 0.1$ et $W = 0.04$
($\|w(t)\|_2 \leq 20\% \|x(s_k)\|_2$)



Résumé

Nous avons présenté une approche par enveloppes convexes garantissant la β -stabilité pour les systèmes LTI perturbés. Elle peut être utilisée pour plusieurs types d'applications :

- ▶ analyse de stabilité robuste vis-à-vis des variations du pas d'échantillonnage
- ▶ contrôle event-triggered
- ▶ contrôle self-triggered
- ▶ échantillonnage dépendant de l'état

Résumé

Principales contributions et avantages :

- ▶ Extension de l'approche d'échantillonnage dépendant de l'état au cas perturbé
- ▶ Chacune des approches de contrôle dynamique de l'échantillonnage bénéficie des résultats de l'analyse de stabilité robuste vis-à-vis des variations du pas d'échantillonnage :
 - Maximisation du pas d'échantillonnage minimal τ^*
 - Calcul de la fonction de Lyapunov
- ▶ Approche par enveloppes convexes en présence de perturbations

Plan

Introduction

Système LTI idéal

Système LTI perturbé

Système LTI perturbé et à retard - stabilisation

Conclusion et perspectives

Description du système

On considère le système

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}$$

avec une commande échantillonnée retardée

$$u(t) = -Kx(s_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}).$$

Les instants d'échantillonnage s_k et de contrôle t_k sont liés par la relation

$$s_k = t_k - h(t_k),$$

avec un retard $h(t)$ borné, et une dérivée bornée.

Les pas d'échantillonnage sont définis par

$$s_{k+1} - s_k = \tau(s_k, x(s_k)) \in [\tau^-, \tau_{\max}(x(s_k))].$$

Critère de stabilité \mathcal{L}_2

Perturbations + retards \Rightarrow Critère de stabilité \mathcal{L}_2

Lemme

Le système est \mathcal{L}_2 -stable de w à z s'il existe une fonction $V \succ 0$ suffisamment lisse, qui satisfait

$$\dot{V}(t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \leq 0.$$

Critère de stabilité \mathcal{L}_2

Perturbations + retards \Rightarrow Critère de stabilité \mathcal{L}_2

Lemme

Le système est \mathcal{L}_2 -stable de w à z s'il existe une fonction $V \succ 0$ suffisamment lisse, qui satisfait

$$\dot{V}(t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \leq 0.$$

Fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

On travaille avec la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

$$V_{\sigma_k}(t, x_t, \dot{x}_t) = x^T(t)Px(t) + V_1(t, x_t, \dot{x}_t) + V_{2,\sigma_k}(t, x_t, \dot{x}_t),$$

avec un terme consacré au **retard** (termes de [Fridman - S&CL 2001](#); [Richard, Automatica 2003](#); [Jiang, Seuret - NecSys 2010](#)) :

$$V_1(t, x_t, \dot{x}_t) = \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds + \dots,$$

et un terme consacré à l'**échantillonnage** (termes de [Fridman - Automatica 2010](#); [Jiang, Seuret - NecSys 2010](#)) :

$$V_{2,\sigma_k}(t, x_t, \dot{x}_t) = (t_{k+1} - t) \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s)U_{\sigma_k}\dot{x}(s)ds + \dots,$$

avec $\sigma_k \equiv \sigma(x(s_k), \tau_k) \in \left\{ \sigma \in \{1, \dots, q\} \mid \left\{ \begin{array}{l} x(s_k) \in \mathcal{R}_\sigma \\ \tau_k \in [\tau^-, \tau_\sigma^+] \end{array} \right\} \right\}$

Principaux résultats de stabilité

Théorème (MSR'11, CDC'12, IJC - provisoirement accepté),
La LKF V satisfait les conditions de stabilité \mathcal{L}_2 si un nombre fini
de LMIs $\Xi_{i,\sigma}(\tau_\sigma^+) \preceq 0$ est satisfait pour chaque région \mathcal{R}_σ

Principaux résultats de stabilisation

Le problème de stabilisation est considéré avec

- ▶ un contrôleur linéaire classique :

$$u(t) = -Kx(s_k)$$

⇒ Co-design contrôleur / fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

- ▶ Un nouveau type de contrôleur avec des gains qui commutent en fonction de l'état échantillonné du système et du pas d'échantillonnage

$$u(t) = -K_{\sigma(x(s_k), T_k)} x(s_k)$$

⇒ Co-design contrôleur / fonction d'échantillonnage dépendant de l'état

Les deux co-designs sont réalisés à l'aide de LMIs

Principaux résultats de stabilisation

Le problème de stabilisation est considéré avec

- ▶ un contrôleur linéaire classique :

$$u(t) = -Kx(s_k)$$

⇒ Co-design contrôleur / fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

- ▶ Un nouveau type de contrôleur avec des gains qui commutent en fonction de l'état échantillonné du système et du pas d'échantillonnage

$$u(t) = -K_{\sigma(x(s_k), T_k)} x(s_k)$$

⇒ Co-design contrôleur / fonction d'échantillonnage dépendant de l'état

Les deux co-designs sont réalisés à l'aide de LMIs

Principaux résultats de stabilisation

Le problème de stabilisation est considéré avec

- ▶ un contrôleur linéaire classique :

$$u(t) = -Kx(s_k)$$

⇒ Co-design contrôleur / fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

- ▶ Un nouveau type de contrôleur avec des gains qui commutent en fonction de l'état échantillonné du système et du pas d'échantillonnage

$$u(t) = -K_{\sigma(x(s_k), T_k)} x(s_k)$$

⇒ Co-design contrôleur / fonction d'échantillonnage dépendant de l'état

Les deux co-designs sont réalisés à l'aide de LMIs

Exemple 1 - Échantillonnage dépendant de l'état pour les systèmes avec perturbations et retards

On considère le système :

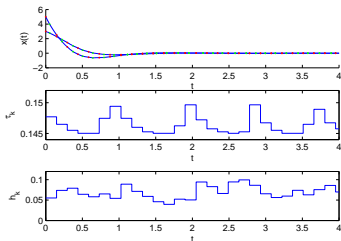
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} Kx(s_k) + w(t), \text{ et} \\ K = \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}, z(t) = x(t), \text{ pour } t \in [t_k, t_{k+1}).$$

Gain \mathcal{L}_2 : $\gamma = \sqrt{10}$ (système asymptotiquement stable si $\|w(t)\| \leq 32\% \|x(t)\|$).

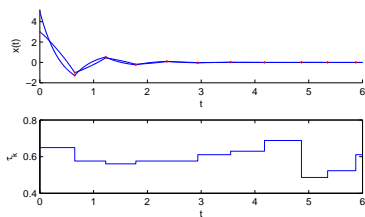
Retard : $h(t) \in [10^{-4}, 10^{-1}]$ $\dot{h}(t) \in [-0.2, 0.6]$.

Exemple 1 - Échantillonnage dépendant de l'état pour les systèmes avec perturbations et retards

Simulations avec une perturbation satisfaisant
 $\|w(t)\| = \frac{1}{\gamma} \|x(t)\| \simeq 32\% \|x(t)\|$



Retard variable



Pas de retard

Exemple 2 - Réduction du conservatisme grâce à la LKF à matrices qui commutent

On considère le système de [Hetel, Kruszewski, Perruquetti, Richard - IEEE TAC 2011](#) :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 3.5 \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} Kx(s_k), \text{ et}$$
$$K = \begin{bmatrix} -1.02 & 5.62 \end{bmatrix}, z(t) = x(t), \text{ pour } t \in [s_k, s_{k+1}).$$

Exemple 2 - Réduction du conservatisme grâce à la LKF à matrices qui commutent

Comparaison :

- ▶ borne inférieure τ^+ de la fonction d'échantillonnage,
- ▶ bornes supérieures de stabilité robuste dans la littérature.

Naghshtabrizi, Hespanha, Teel - S&CL 2008	$\tau^+ = 0.165$
Seuret - CDC 2009	$\tau^+ = 0.198$
Fujioka - Automatica 2009	$\tau^+ = 0.204$
Fridman - Automatica 2010	$\tau^+ = 0.259$
Notre Théorème avec LKF sans commutations	$\tau^+ = 0.267$
Notre Théorème avec LKF avec commutations	$\tau^+ = 0.309$

Exemple 3 - Échantillonnage dépendant de l'état pour des systèmes instables à la fois en boucle ouverte et en boucle fermée (avec un retour d'état continu)

On considère un système de Gu, Kharitonov, Chen - Birkhauser 2003 :

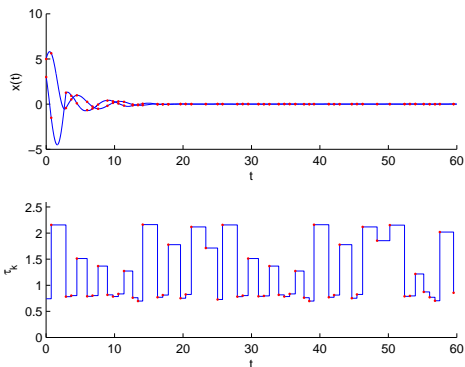
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Kx(s_k), \text{ pour } t \in [s_k, s_{k+1}),$$

avec $K = [-1 \quad 0]$, $z(t) = x(t)$.

- ▶ Instable en boucle ouverte (A n'est pas Hurwitz)
- ▶ Instable en boucle fermée avec un retour d'état continu ($A - BK$ n'est pas Hurwitz)
- ▶ Asymptotiquement stable pour $T_{\text{const}} = 0.25s$

Exemple 3 - Échantillonnage dépendant de l'état pour des systèmes instables à la fois en boucle ouverte et en boucle fermée (avec un retour d'état continu)

Simulation avec la fonction d'échantillonnage obtenue avec $\tau^- = 0.25$



Exemple 4 - Contrôleur dépendant de l'état pour des systèmes perturbés

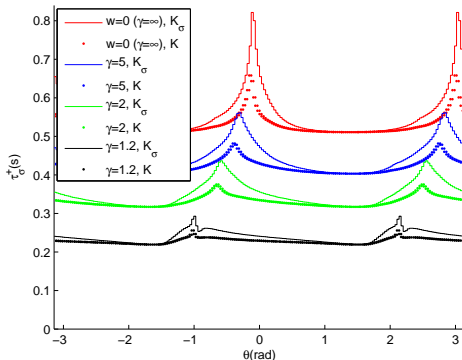
On considère le système de [Tabuada, IEEE TAC 2007](#), auquel nous ajoutons un contrôleur à gains qui commutent :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K_{\sigma_k} x(s_k),$$

avec $z(t) = x(t)$, pour $t \in [s_k, s_{k+1})$.

Exemple 4 - Contrôleur dépendant de l'état pour des systèmes perturbés

Fonctions d'échantillonnage obtenues pour différents gains \mathcal{L}_2 γ , avec ou sans le contrôleur à gains qui commutent



Résumé

Nous avons présenté une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état construite à partir de LMIs, et qui assure la β -stabilité de systèmes LTI avec perturbations et retards, tout en élargissant le pas d'échantillonnage.

Principales contributions et avantages

- ▶ Échantillonnage dépendant de l'état pour les systèmes perturbés et à retard
 - Optimisation du pas d'échantillonnage minimal
 $\tau^+ = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \tau_{\max}(x)$, prenant en compte à la fois l'échantillonnage, le retard, et les perturbations
 - Calcul des matrices de la LKF
 - Construction hors-ligne de la fonction d'échantillonnage

Résumé

Principales contributions et avantages

- ▶ Stabilisation (2 types) dans le cadre du contrôle dynamique de l'échantillonnage
- ▶ Nouveau type de contrôleur avec des gains qui commutent en fonction de l'état et du pas d'échantillonnage
- ▶ Stabilisation par le contrôle dynamique de l'échantillonnage
- ▶ Utilisation de LKF dans le cadre du contrôle dynamique de l'échantillonnage
- ▶ Nouveau type de LKF avec des matrices qui commutent en fonction de l'état et du pas d'échantillonnage

Plan

Introduction

Système LTI idéal

Système LTI perturbé

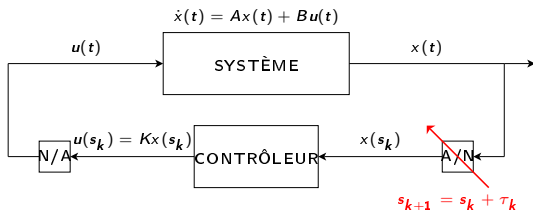
Système LTI perturbé et à retard - stabilisation

Conclusion et perspectives

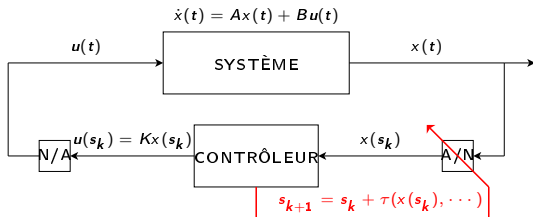
Conclusion

Contributions :

- Analyse de stabilité robuste vis-à-vis des variations du pas d'échantillonnage



- Contrôle dynamique du pas d'échantillonnage



Conclusion

Introduction à un nouvel algorithme de contrôle dynamique de l'échantillonnage, l'**échantillonnage dépendant de l'état**, qui permet :

- ▶ d'échanger des calculs en-ligne contre des calculs hors-ligne
- ▶ de maximiser la borne inférieure de la fonction d'échantillonnage, tout en prenant en compte les perturbations et les retards quand ils sont présents
- ▶ de calculer la fonction de Lyapunov adéquate
- ▶ d'étendre l'approche classique d'analyse de stabilité robuste au cas de systèmes à pas variable et dépendant de l'état

Conclusion

Différents cas d'étude ont été présentés :

- ▶ Système LTI idéal - approche polytopique (JDMACS'11, IFAC WC'11, Automatica'12)
- ▶ Système LTI perturbé - approche polytopique (TDS'13 - soumis, version Journal à soumettre)
- ▶ Système LTI perturbé et à retard - approche par LKF (MSR'11 - prix du meilleur papier jeune chercheur, CDC'12, IJC - provisoirement accepté)
- ▶ Système LTI perturbé - stabilisation avec des gains qui commutent - approche par LKF (IJC - provisoirement accepté)

Perspectives

Travaux futurs :

- ▶ Système idéal - approche en temps-discret - analyse de stabilité sur des *séquences d'échantillonnage* (voir [Maleej, Fiter, Hetel, Richard - MED'12](#) et [Maleej, Fiter, Hetel, Richard - CIFA'12](#))
- ▶ Systèmes perturbés avec une commande par *retour de sortie basée observateur* - approche LKF
- ▶ Système perturbé avec une *commande par rejet de perturbation* - approche LKF
- ▶ Extension aux *systèmes non-linéaires* (systèmes homogènes ?)

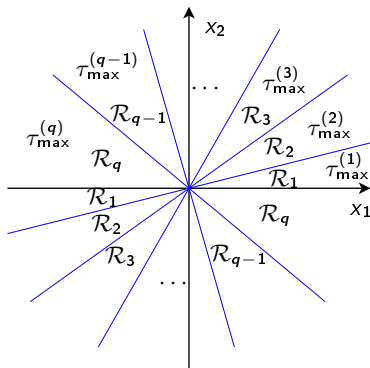
Merci !

Merci de votre attention !

Space discretization

Main idea :

- ▶ Cover the state space by a finite number of conic regions \mathcal{R}_s .
- ▶ Associate a sampling interval upper-bound $\tau_{\max}^{(s)}$ to each region : $\tau_{\max}(x) = \tau_{\max}^{(s)}$ for all $x \in \mathcal{R}_s$.



Space discretization

Isotropic covering :

Construction based on the spherical coordinates of the state :
 $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$

Advantage : Online computational complexity : $O(n)$; does not depend on the number of conic regions q

Drawback : For a given precision $\frac{\pi}{m}$ for each angle, m^{n-1} regions are needed

Space discretization

Anisotropic covering :

Construction based on the discrete-time model behaviour

$$x_{k+1} = \Lambda(\tau(x_k))x_k, \quad s_{k+1} = s_k + \tau(x_k)$$

$$\mathcal{R}_s = \{x \in \mathbb{R}^n, x^T Q_s x \leq 0\},$$

$$\text{with } Q_s = \Lambda^T(T_s)P\Lambda(T_s) - e^{-2\beta T_s}P,$$

$$\text{and } T_s \in \{T_1, T_2, \dots, T_q\}$$

Advantage : Number of regions does not depend on the system's dimension n ; is proportional to numerical precision

Drawback : Online computational complexity : $O(qn^2)$; depends on the number of regions q

Perturbed case - System description

Here, we consider the system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), \forall t \in \mathbb{R}_+$$

with the sampled-data control

$$u(t) = -Kx(s_k), \forall t \in [s_k, s_{k+1}),$$

the sampling intervals defined by

$$s_{k+1} - s_k = \tau(s_k, x(s_k)) \in (0, \tau_{\max}(x(s_k))], \forall k \in \mathbb{N},$$

and the perturbation satisfying

$$\exists W \geq 0, \|w(t)\|^2 \leq W \|x(s_k)\|^2, \forall t \in [s_k, s_{k+1}), \forall k \in \mathbb{N}$$

Perturbed case - First stability conditions

Lemma

Consider a map $\tau_{\max} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\|\tau_{\max}\|_{\infty} \leq \bar{\sigma}$.

The system is globally β -stable if there exist $P \succ 0$, $\varepsilon \geq 0$ such that for all $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in [0, \tau_{\max}(x)]$,

$$\begin{bmatrix} \Lambda(\sigma)x + J_w(\sigma) \\ x \\ w(\sigma) \end{bmatrix}^T \Omega \begin{bmatrix} \Lambda(\sigma)x + J_w(\sigma) \\ x \\ w(\sigma) \end{bmatrix} \leq 0,$$

with the matrices

$$\Lambda(\sigma) = I + \int_0^{\sigma} e^{sA} ds (A - BK), \quad J_w(\sigma) = \int_0^{\sigma} e^{A(\sigma-s)} E w(s) ds,$$

and

$$\Omega = \begin{bmatrix} A^T P + PA + \varepsilon \alpha P + 2\beta P & -PBK & PE \\ * & -\varepsilon P & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}.$$

(with $\alpha > 1$, $\bar{\sigma} > 0$, $W \geq 0$, and $0 < \beta \leq \frac{\ln(\alpha)}{2\bar{\sigma}}$)

Perturbed case - Main stability conditions

Theorem (TDS'13 - submitted, Journal version to be submitted)

Consider a map $\tau_{\max} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $0 < \delta \leq \tau_{\max}(x) \leq \bar{\sigma}$.

The system is globally β -stable if there exist $\varepsilon \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\mu \geq 0$, $P \succ 0$, $\Phi_1 \succ 0$, $\Phi_2 \succ 0$, $\Phi_3 \succ 0$, such that

$$0 \preceq M_1 + \Phi_1 + \Phi_2 \preceq \mu I, \quad \begin{bmatrix} \Phi_3 - \eta I & M_3^T \\ * & -\Phi_2 \end{bmatrix} \preceq 0,$$

and

$$x^T \Pi(\sigma) x \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \sigma \in [0, \tau_{\max}(x)],$$

with

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma) = & \Lambda(\sigma)^T M_1 \Lambda(\sigma) - \Lambda(\sigma)^T P B K - K^T B^T P \Lambda(\sigma) - \varepsilon P + W \eta I \\ & + M_2(\sigma)^T \Phi_1^{-1} M_2(\sigma) + M_4(\sigma)^T \Phi_3^{-1} M_4(\sigma) + \sigma W \mu \lambda_{\max}(E^T E) f_A(\sigma) I, \end{aligned}$$

$$M_1 = A^T P + P A + \varepsilon \alpha P + 2\beta P, \quad M_3 = P E,$$

$$M_2(\sigma) = -P B K + M_1 \Lambda(\sigma), \quad M_4(\sigma) = E^T P^T \Lambda(\sigma),$$

$$f_A(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{\max}(A+A^T)} \left(e^{\lambda_{\max}(A+A^T)\sigma} - 1 \right) & \text{if } \lambda_{\max}(A+A^T) \neq 0, \\ \sigma & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(with $\alpha > 1$, $\bar{\sigma} > 0$, $W \geq 0$, and $0 < \beta \leq \frac{\ln(\alpha)}{2\bar{\sigma}}$)

Stabilization with a piecewise-constant feedback control

$$u(t) = -Kx(s_k)$$

Theorem

The system is finite-gain \mathcal{L}_2 -stabilizable from w to z with a gain less than γ for any sampling sequence with values in $[\tau^-, \tau^+]$ if there exist $\tilde{P} \succ 0$, $\tilde{U} \succeq 0$, $\tilde{S} \succeq 0$, Q invertible, M , \tilde{Y}_1 , \tilde{Y}_2 , \tilde{Y}_3 , \tilde{X} , \tilde{X}_1 , and δ such that

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \tau^+ \begin{bmatrix} \frac{\tilde{X} + \tilde{X}^T}{2} & -\tilde{X} + \tilde{X}_1 \\ * & \frac{\tilde{X} + \tilde{X}^T}{2} \end{bmatrix} \succ 0 \text{ and } \hat{\Xi}_{i,j} \succeq 0, \forall (i,j) \in \{1,2\}^2, \text{ with}$$

$$\hat{\Xi}_{1,j} = \begin{bmatrix} \hat{L}_{1,1} & \hat{L}_{1,2} + T_j \tilde{Z} & \hat{L}_{1,3} & E & Q^T C^T \\ * & \hat{L}_{2,2} + T_j \tilde{U} & \hat{L}_{2,3} + T_j (-\tilde{X} + \tilde{X}_1) & \delta E & 0 \\ * & * & \hat{L}_{3,3} + T_j \tilde{S} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

Stabilization with a piecewise-constant feedback control

$$u(t) = -Kx(s_k)$$

$$\hat{\Xi}_{2j} = \begin{bmatrix} \hat{L}_{1,1} & \hat{L}_{1,2} & \hat{L}_{1,3} & T_j \tilde{Y}_1^T & E & Q^T C^T \\ * & \hat{L}_{2,2} & \hat{L}_{2,3} & T_j \tilde{Y}_2^T & \delta E & 0 \\ * & * & \hat{L}_{3,3} - T_j \tilde{S} & T_j \tilde{Y}_3^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -T_j \tilde{U} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$\hat{L}_{1,1} = -\tilde{Y}_1^T - \tilde{Y}_1 + AQ + Q^T A^T - \tilde{Z}, \quad \hat{L}_{1,2} = \tilde{P} - \tilde{Y}_2 - Q + \delta Q^T A^T,$$

$$\hat{L}_{1,3} = -BM + \tilde{Y}_1^T - \tilde{Y}_3 + \tilde{X} - \tilde{X}_1, \quad \hat{L}_{2,2} = -\delta Q^T - \delta Q,$$

$$\hat{L}_{2,3} = \tilde{Y}_2^T - \delta BM, \quad \hat{L}_{3,3} = \tilde{Y}_3^T + \tilde{Y}_3 + \tilde{Z}_1 - \tilde{Z},$$

$$T_1 = \tau^-, \quad T_2 = \tau^+,$$

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{X} + \tilde{X}^T}{2}, \quad \text{and} \quad \tilde{Z}_1 = \tilde{X}_1^T + \tilde{X}_1.$$

The stabilizing feedback matrix gain is provided by $K = MQ^{-1}$.

Stabilization with a switching piecewise-constant feedback control

$$u(t) = -K_{\sigma_k} x(s_k)$$

Theorem

Consider matrices $P \succ 0$, P_2 , P_3 , and a set of q conic regions covering the state space $\mathcal{R}_\sigma = \{x, x^T \Psi_\sigma x \geq 0\}$, $\Psi_\sigma \in S_n$, $\sigma \in \{1, \dots, q\}$, with maximal sampling intervals τ_σ^+ .

The system is finite-gain \mathcal{L}_2 -stabilizable from w to z with a gain less than γ if there exist $\varepsilon_{i,j,\sigma} \geq 0$, $U_\sigma \succeq 0$, $S_\sigma \succeq 0$, $Y_{1,\sigma}$, $Y_{2,\sigma}$, $Y_{3,\sigma}$, X_σ , $X_{1,\sigma}$, and K_σ such that

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \tau_\sigma^+ \Omega_\sigma - \varepsilon_\sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi_\sigma \end{bmatrix} \succ 0 \text{ and } \bar{\Xi}_{i,j,\sigma} \preceq 0, \forall (i,j) \in \{1,2\}^2, \text{ with}$$

$$\bar{\Xi}_{1,j,\sigma} = \begin{bmatrix} \bar{L}_{1,1,\sigma} & \bar{L}_{1,2,\sigma} + T_{j,\sigma} Z_\sigma & \bar{L}_{1,3,\sigma} & P_2^T E \\ * & \bar{L}_{2,2,\sigma} + T_{j,\sigma} U_\sigma & \bar{L}_{2,3,\sigma} + T_{j,\sigma} (-X_\sigma + X_{1,\sigma}) & P_3^T E \\ * & * & \bar{L}_{3,3,\sigma} + T_{j,\sigma} S_\sigma + \varepsilon_{1,j,\sigma} \Psi_\sigma & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

Stabilization with a switching piecewise-constant feedback control

$$u(t) = -K_{\sigma_k} x(s_k)$$

$$\Xi_{2,j,\sigma} = \begin{bmatrix} \bar{L}_{1,1,\sigma} & \bar{L}_{1,2,\sigma} & & \bar{L}_{1,3,\sigma} & T_{j,\sigma} Y_{1,\sigma}^T & P_2^T E \\ * & \bar{L}_{2,2,\sigma} & & \bar{L}_{2,3,\sigma} & T_{j,\sigma} Y_{2,\sigma}^T & P_3^T E \\ * & * & \bar{L}_{3,3,\sigma} - T_{j,\sigma} S_\sigma + \varepsilon_{2,j,\sigma} \Psi_\sigma & & T_{j,\sigma} Y_{3,\sigma}^T & 0 \\ * & * & * & * & -T_{j,\sigma} U_\sigma & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}_{1,1,\sigma} = C^T C - Y_{1,\sigma}^T - Y_{1,\sigma} + P_2^T A + A^T P_2 - Z_\sigma, \quad \bar{L}_{1,2,\sigma} = P - Y_{2,\sigma} - P_2^T + A^T P_3,$$

$$\bar{L}_{1,3,\sigma} = -P_2^T B K_\sigma + Y_{1,\sigma}^T - Y_{3,\sigma} + X_\sigma - X_{1,\sigma}, \quad \bar{L}_{2,2,\sigma} = -P_3 - P_3^T,$$

$$\bar{L}_{2,3,\sigma} = Y_{2,\sigma}^T - P_3^T B K_\sigma, \quad \bar{L}_{3,3,\sigma} = Y_{3,\sigma}^T + Y_{3,\sigma} + Z_{1,\sigma} - Z_\sigma,$$

$$T_{1,\sigma} = T_1 = \tau^- \text{ and } T_{2,\sigma} = \tau_\sigma^+,$$

$$\Omega_\sigma = \begin{bmatrix} \frac{X_\sigma + X_\sigma^T}{2} & & -X_\sigma + X_{1,\sigma} \\ * & & -X_{1,\sigma} - X_{1,\sigma}^T + \frac{X_\sigma + X_\sigma^T}{2} \end{bmatrix}, \quad Z_\sigma = \frac{X_\sigma + X_\sigma^T}{2}, \quad Z_{1,\sigma} = X_{1,\sigma}^T + X_{1,\sigma},$$

The stabilizing feedback matrix gains are directly provided as the LMI variables K_σ .