

EC Lille, Filière “Recherche”
Module interne “Systèmes dynamiques”, 20 janvier 2006

J.-P. Richard (durée : 2 heures, documents personnels autorisés)

Premier problème

Caractériser (précisément) les propriétés de stabilité pour les systèmes dynamiques suivants (où $x \in \mathbb{R}$) :

$$\dot{x} = -1, \quad (1)$$

$$\dot{x} = -|\sin x|, \quad (2)$$

$$\dot{x} = x(x^2 - 1). \quad (3)$$

Deuxième problème

Etudier les propriétés de convergence du système suivant, où $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 \sin t - x_2. \end{cases} \quad (4)$$

(Un dessin de résumé dans le plan (x_1, x_2) est demandé).

Troisième problème

Etudier les propriétés de convergence du système (5) suivant, où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 + 1)^2 x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 1. \end{cases} \quad (5)$$

Quatrième problème

On rappelle tout d’abord le célèbre résultat : **(Théorème)** *Si les champs de vecteurs f, g sont \mathcal{C}^∞ , le système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, $x \in \mathbb{R}^n$ est localement faiblement commandable en x_1 si $\text{rang } \{g, [f, g], [[f, g], g], [[[f, g], g], g] \dots\}|_{x_1} = n$.*

On considère les deux systèmes suivants : à quelles conditions chacun est-il localement faiblement commandable en tout point x ?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -ax_1 - bx_2 + \gamma(x)u. \end{cases} \quad (6)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (7)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}.$$

(on suppose ici $\gamma(x) \in \mathcal{C}^\infty$, a et b des scalaires constants, A une matrice constante de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et B un vecteur constant de \mathbb{R}^n)