

Filière Recherche, Ecole Centrale de Lille
Epreuve de “Systèmes Dynamiques”, 15 janvier 2010
J.-P. Richard (documents personnels autorisés)

Premier problème

Caractériser précisément les propriétés de stabilité des systèmes suivants :

$$\dot{y} = 1 - e^y, \quad (1)$$

$$\dot{y} = 4y - y^3, \quad (2)$$

$$\ddot{y} = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Deuxième problème

On considère le système (5) ci-dessous, d'entrée u et d'état x :

$$\dot{x} = f(x) + gu = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 x_2 + u \\ x_1 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

- 1) Montrer que pour $u = 0$, l'équilibre $x = 0$ est instable (cf. l'équation (3)).
- 2) Proposer une loi $u = u(x_1, x_2, x_3)$ telle que $x = 0$ devienne globalement asymptotiquement stable.
- 3) Calculer les crochets de Lie $g_1 = [f, g], g_2 = [f, [f, g]], g_3 = [f, [f, [f, g]]]$, puis calculer le rang de (g, g_1, g_2, g_3) au point $x = 0$.
- 4) Tout cela vous semble-t-il cohérent et, si oui, pourquoi ?

Troisième problème

On considère le système de type retardé suivant, où k est une constante scalaire et h , une constante scalaire positive :

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = -kx(t-h). \quad (6)$$

- 1) On considère tout d'abord $k = 1$ et $h = \frac{\pi}{2}$. Voyez-vous une solution $x(t)$ particulière ? (pensez trigonométrie...)
- 2) Pour $k = 1$ et $h = \frac{\pi}{2}$, l'équilibre $x = 0$ est-il stable, asymptotiquement stable, ou instable ?
- 3) Voyez-vous un lien entre le système (6) paramétré en $\{k = 1, h = \frac{\pi}{2}\}$ et le système (6) paramétré en $\{k = \frac{\pi}{2}, h = 1\}$?