Théorie des systèmes complexes

J.-P. RICHARD

Ecole Centrale de Lille
EC Lille (anciennement IDN)
Ministère de l'Education Nationale
Cité Scientifique - BP 48
F 59651 Villeneuve d'Ascq Cédex
Tél : (33) 20.33.53.53
Fax : (33) 20.33.54.99
Télex : EUNOR 283 155 F

"On peut rire de tout, mais pas avec n'importe qui..."

[† Pierre Desproges]

Avertissement :

Ce qui suit est le polycopié d'un cours qui se veut illustratif de méthodes non nécessairement cartésiennes (cf. page 3).

Ceci passe par un usage non occasionnel de divers remèdes : analogie, métaphore, illustration, énigme, gesticulation.

Certains de ces composants, administrés principalement par voie orale, peuvent être contre-indiqués dans le cas d'une pensée rationnelle pré-cloisonnée.

Attention, donc, à ne pas dépasser la dose prescrite.

Effets collatéraux potentiels : hallucinations, troubles visuels, délire passager, nausée.

En cas de contre-indication majeure, le patient pourra suspendre le traitement et se reporter directement à la deuxième partie de ce polycopié (page 30).

Cours n°1

SUR LA NOTION DE MODELE

1) Exercice : Vous avez dit… modèle ?

Répondre à la question :

Modèle ?

Plusieurs réponses sont possibles, classez-les selon la question.

2) Niveaux de réalité perçue : *un* réel, *des* réels ?

Ou encore :

Le modélisateur peut-il avoir une perception objective du réel ?

Il faut noter que le mot "évidence" vient de "video" : je crois donc ce que je vois ?

Ici quelques petits exercices visuels, que nous garderons confidentiels…

Conclusions : la reconnaissance visuelle d'un objet

- dépend de ce sur quoi nous avons focalisé notre regard ;
- n'est pas innée mais acquise (demande un apprentissage) ;
- fournit des informations qui étaient absentes de l'objet ;
- tente désespérément de coller avec nos habitudes ;
- déoriente notre système cérébral en cas d'incohérence ;
- utilise éventuellement la vision binoculaire pour mettre dans l'espace.

L'étude du système visuel humain fait apparaître deux fonctionnements : vision fovéale (focalisée) et vision périphérique (globale).

Ceci se retrouve au niveau de la latéralisation de nos fonctionnements cérébraux :

- hémisphère gauche : raisonnement analytique, classification, sens du détail ;
- hémisphère droit : pensée analogique, sensibilité artistique, sens de la relation.

Cours n°2
COMPLICATION ET COMPLEXITE

Rethymnon, 27 juillet 2001

Cher correspondant et ami,

Merci de votre courrier précédent où vous m'entreteniez de vos questions de point de vue… J'ai trouvé vos petits jeux visuels dignes des meilleurs exercices spirituels d'Ignace de Loyola : j'en suis encore amusé et songeur.

De mon côté, j'ai dû la semaine passée aborder des questions liées aux sciences du vivant, cherchant à comprendre l'évolution des espèces. Tentant d'en percevoir les éventuelles lois, les réponses que je retirai de cette étude m'apparurent comme de maigres et provisoires intermédiaires vers une conclusion peut-être inexistante. Par contre, cette quête me sembla intéressante par les questions et difficultés qu'elle soulevait.

Car avez-vous jamais été confronté à un problème qui vous ait « résisté » un peu, beaucoup, passionnément ? Pour moi, cela m'arrive plus que fréquemment. Essayant de mettre un peu d'ordre dans ce qui bousculait un peu trop ma capacité de compréhension, j'ai noté que deux types de situations se présentaient dans de tels cas, que ce soit séparément ou bien ensemble. Puis, en me référant à quelques lectures complémentaires, j'ai constaté qu'elles ont depuis quelque temps été désignées par deux termes : la *complication* et la *complexité*.

Complication

Dans le premier cas, la simple pensée du nombre de détails que j'aurai à prendre en compte, et le nombre encore plus grand de leurs liens causaux… me fatigue par avance. Ainsi d'expliquer précisément le fonctionnement d'un moteur de voiture, ou de faire le bilan chiffré des sommes engagées par le Ministère pour ses Universités. C'est vraiment trop compliqué ! Cependant, même compliqué, un peu de méthode et beaucoup de temps pourraient suffire à en venir à bout. Nous savons vous et moi que la réponse à une telle question existe… ne serait-ce d'ailleurs pas là ce qui fait le fastidieux de la chose ?

Henri Atlan, homme de la biologie par profession et de la Loi par religion, écrivait en 1979 :

> *« La complication n'exprime à la limite qu'un grand nombre d'étapes ou d'instructions pour décrire, spécifier et construire un système à partir de ses constituants. En ce sens, la complication est un attribut des systèmes artificiels, construits, ou au moins constructibles, par l'homme qui en connaît et comprend totalement la structure et le fonctionnement. Elle est mesurable à partir des épures, plans et programmes qui spécifient dans les détails la construction éventuelle du système. Très souvent, aujourd'hui, la complication est mesurée par un temps de calcul d'ordinateur*

nécessaire pour réaliser un programme : plus ce temps est long (en travaillant avec le même ordinateur), plus le programme, et donc le système qu'il spécifie, est compliqué. »

Cher correspondant, je vous conseille la lecture de son ouvrage « Entre le cristal et la fumée : essai sur l'organisation du vivant »... Son titre splendide est doublé d'une réflexion pointue sur la question...

C'est vraiment trop compliqué... et c'est précisément pour surmonter ce type de difficulté que l'ami René Descartes (à gauche sur votre écran) avait proposé en 1637 un « discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences » en donnant ses quatre préceptes (je les nommerai pour résumer Evidence, Décomposition, Recomposition et Exhaustivité) :

« Ainsi, au lieu de ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurais assez des quatre suivants, pourvu que je prisse une ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois à les observer.

- *Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle, c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention, et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit que je n'eusse aucune occasion de la mettre en doute.*
- *Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.*
- *Le troisième, de conduire par ordre mes pensées en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés, et supposant de même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement.*
- *Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales que je fusse assuré de ne rien omettre. »*

Ainsi, si vous concevez la complication comme résultant de l'empilage ou l'assemblage d'un grand nombre d'éléments, vous retrouverez l'étymologie du mot : "plier ensemble" (*cum-plicare*). Grâce à la manière-Descartes, nous pouvons ainsi *ex*pliquer (déplier) un phénomène compliqué en le simplifiant, c'est-à-dire en analysant chacun de ces éléments et relations (approche que nous pourrions qualifier de "cartésienne" ou "analytique"). Le compliqué est un de ces *origami* japonais, qui nous serait donné "tout fait" et dont nous aurions à déplier la feuille en recopiant soigneusement le plan de pliage...Tigre de papier !

En fait, et c'est bien là la caractéristique du "compliqué", il a *une* explication... même si en rassembler les éléments doit prendre des heures de calculateur, ou des années... question de niveau de *multi-plicité*...

C'est dire qu'aucun phénomène ouvert, par exemple vivant (biologique, psychologique, social, culturel...) ne peut être assimilé à un modèle "compliqué", nécessairement fermé.

Descartes était aidé dans sa méthode par un outillage conceptuel connu bien avant son siècle : les traités d'Aristote sur la logique avaient été traduits par Boèce (480-†524). Oh, bien sûr, ce que Boèce avait traduit n'était pas « tout Aristote », puisqu'il fallut attendre 1170 pour que, à la demande du calife de Marrakech, la traduction du reste de son œuvre soit rassemblée et publiée à Tolède et Palerme par le médecin et philosophe andalou Ibn Ruchd (le fameux Averroes)... Vous vous doutez bien que l'ouvrage et ses commentaires, qui cherchaient à unir le rationnel (philosophie) et le traditionnel (religion), furent rapidement interdits par l'Eglise (concile de Paris, 1210) et condamnés par les théologiens de l'Islam. Enfin, je m'égare, je voulais vous entretenir de cette « logique aristotélicienne » qui aujourd'hui encore, fait auprès de nos étudiants et collègues, tantôt des miracles, tantôt des ravages : vous vous souvenez peut-être qu'elle se fonde sur les trois axiomes (identité, non-contradiction et tiers exclus) ?

Si votre mémoire vous faisait cependant défaut sur ce point, je vous proposerais de résumer ces axiomes comme suit (et sous une forme tout à fait inconnue d'Aristote !)

Axiome d'identité :	"Ce qui est, est",
ou bien	"*A* est *A*",
ou encore	$A = A$.
Axiome de non-contradiction : "il est impossible d'affirmer et de nier en même temps"	
ou bien	"*B* ne peut être à la fois *A* et son contraire non-*A*",
ou encore	$A.\bar{A} = 0$.
Axiome du tiers exclus :	"toute chose est affirmée ou niée",
ou bien	"*B* est forcément *A* ou non-*A*",
ou encore	$A + \bar{A} = 1$.

Ces trois axiomes constituent le « ou exclusif », le « xor » des anglophones :

"*B* est forcément soit *A*, soit non-*A*, exclusivement",

ou encore $A \oplus \bar{A} = 1$,

dont le caractère franchement disjonctif (rassurez-vous, cher correspondant, je ne veux pas entendre par là que vous êtes entrain de disjoncter, mais qu'un tel outil effectue une *disjonction*, comme le « *et* » effectue une *conjonction*) servira pour la décomposition analytique en « *if, then, else* » (si..., alors..., sinon...) chère à nos informaticiens.

Ce « tri » s'effectue sur la base de la règle de Shannon :

$$f(A, B, C, ...) = \bar{A}\, f(0, B, C, ...) \oplus A\ f(1, B, C, ...),$$

qui complète adéquatement les constructions logiques codifiées par George Boole au XIX[e] siècle dans sa « Theory of human thought », Nous retrouvons ici nos bonnes vieilles « tables de vérité » (vérité au singulier, bien-sûr !).

Ainsi, Aristote, puis Boole et Shannon nous ont assuré que nous pouvions décomposer un gros problème *f* en deux plus petits sous-problèmes : d'une part, le problème dans cas où une de ses composantes *A* est vraie, d'autre part le cas contraire où *A* est fausse. La recomposition est garantie !

En termes plus familiers : s'il pleut, nous resterons à la maison (où nous avons tout un tas de choses à faire), s'il ne pleut pas, nous sortirons (et le programme sera différent). Dans tous les cas, une décision sera prise, et de façon unique puisque, soit il pleut, soit il ne pleut pas, les deux ne pouvant advenir simultanément.

Bref, l'outil idéal pour servir l'approche cartésienne par décomposition, que nous dirons également « analytique »...

complication <-> multiplicité

analyser un objet compliqué pour l'expliquer

Mais, vous vous en doutez bien, ceci ne s'applique pas à toutes les difficultés qui pourraient confondre notre intelligence ou résister à la curiosité de nos esprits scientifiques (le jour où le climat est brumeux, que faire ?).

Les objections que j'aimerais donc soulever ici (et je ne suis pas le premier !) sont de deux ordres : l'un lié aux présupposés de ce « ou » disjonctif et exclusif, et l'autre à ceux des préceptes cartésiens. Les deux sont d'ailleurs liés car n'est pas disjonctif qui veut...

Pour ce qui est du premier, revenons donc un peu sur la logique aristotélicienne : nous pouvons tout d'abord nous accorder pour lui rendre ce vibrant hommage : son efficacité a maintenant fait ses preuves dans de multiples domaines. Ceux où une classification était souhaitée (le muséum d'histoire naturelle, avec ses bocaux étiquetés et ses squelettes reconstitués), ceux où une vision « mécaniste » des phénomènes permet de les organiser (la phase de réalisation d'un bâtiment, la comptabilité analytique de votre entreprise...) ou de les informatiser (en fait, le micro-ordinateur sur lequel je vous écris cette missive fonctionne totalement sur ces principes... sauf lorsqu'il se plante sous prétexte que *Explorer* vient de créer une défaillance !) ... Malgré tout, elle comporte plusieurs pièges et limitations.

Parmi les pièges, le plus attirant chez ceux dont la formation intellectuelle en a utilisé de fortes doses (je pense ici à nos étudiants scientifiques, à qui j'essaierai certainement d'en toucher un mot prochainement) est le risque d'utilisation non intentionnelle : le processus de pensée étant tellement bien connu, tellement pratiqué-huilé-rodé, qu'on en viendrait bientôt à croire qu'il est le seul, que la vision disjonctive n'a pas d'alternative est pourquoi pas, ... qu'elle reflète la nature des choses ? Alors faisons du Descartes, pratiquons de l'Aristote, disjoignons à plaisir mais, que diable ! restons maître de nos choix...

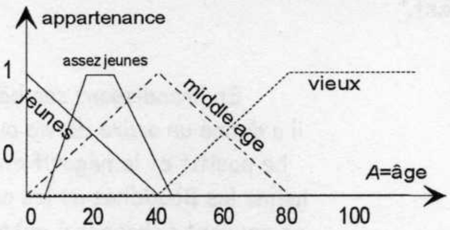
Le second piège est de croire à une espèce d'objectivité qui s'insinuerait, là aussi, à trop côtoyer de telles équations. Que l'opérateur *xor* ait pu être placé dans la formule (donc dans l'analyse), par une sorte d'intervention divine et indépendamment de tout observateur ou modélisateur, par exemple...

Ou bien que *A* soit éternellement égal à lui-même : la linguistique et plus généralement la sémantique nous offrent une multitude d'exemple de mots possédant quantité de signifiés différents (ont dit une polysémie, mais ça n'est pas une maladie), un des plus courts étant la simple lettre x (monsieur x, film x, terminal x, x-files, rayons x, axe des x, ... n'hésitez surtout pas à compléter ma liste dans une de vos prochaines missives, si toutefois mes courriers ne vous exténuent pas). Qui plus est, ces signifiés apparaissent et se modifient au cours du temps et c'est peut-être un peu trop d'innocence de croire que « Paris sera toujours Paris »...

Côté limitations de notre bonne logique « classique », je me permettrai d'en relever deux : l'une liée à l'exclusion du tiers qui mène à une vision « tout-noir-ou-tout-blanc », et rien d'autre ; l'autre concerne la non-contradiction et donc le rejet du paradoxe.

Pour la première, je l'illustrerai tout d'abord par une règle qui nous concernera tous deux (je sais que vous avez des talents de cuisinier !) : « s'il y a de nombreux invités assez jeunes, préparez beaucoup de nourriture ». Elle correspond à un de nos modes de raisonnement familiers, et est pourtant difficilement traduisible dans le contexte de la logique aristotélicienne. Cela donnerait : « si vous avez plus de 20 invités d'âge compris entre 12 et 25 ans, préparez 40 kg de nourriture ». Vous en conviendrez, c'est assez réducteur... Lotfi Zadeh a montré que de telles phrases pouvaient être codées dans une extension qu'il a nommée *fuzzy logic*, « logique floue », ou plus précisément logique des sous-ensembles flous.

Pardonnez-moi d'entrer ici dans une parenthèse quelque peu détaillée, mais on ne se refait pas et ma formation mathématique reprend le dessus... vous pouvez passer sur ce qui va suivre ! Donc, dans notre « classique » logique aristotélicienne, les variables prennent leurs valeurs dans un ensemble booléen {0, 1} : par exemple, $A = 1$ pour « la proposition A est vraie » et 0 pour « fausse ». Ceci s'exprime autrement dans la « théorie des ensembles » : si V est l'ensemble des propositions vraies, $A = 1$ s'écrit A appartient à V, $A = 0$ s'écrit A n'appartient pas à V, et l'alternative aristotélicienne $A \oplus \bar{A} = 1$ devient : soit A appartient à V, soit elle n'y appartient pas, exclusivement. Pour permettre de traduire des règles comme celle de notre cuisinier, il a proposé en 1963 d'utiliser l'intervalle [0, 1] (théorie dite des sous-ensembles flous). Dans cette perspective, les fonctions d'appartenance ne sont plus limitées à 0 et 1, mais elles sont comprises entre ces deux bornes : la fonction d'appartenance de A à V vaudra 0.73 et son contraire (la fonction de non appartenance de A à V), vaut 0.27 par définition. On remplace ainsi l'ensemble binaire {0,1} par le segment [0,1], et A peut être ni totalement vraie, ni totalement fausse... et le « tout noir ou tout blanc » s'enrichit de niveaux de gris intermédiaires. Je vais essayer de vous dessiner quelques fonctions d'appartenance, en étant assez optimiste sur notre évolution en âge...



Bien, le résultat du croquis me semble correspondre à mon point de vue d'aujourd'hui... peut-être que je n'aimerai pas être classé dans les « assez vieux » à 60 ans et « totalement vieux » à 80, ... mais nous rediscuterons de cela le moment venu, voulez-vous ?

Me relisant, je vois que nous en étions à ce tiers-exclus auquel je voudrais ajouter une remarque, suggérée par le théorème d'incomplétude de Kurt Gödel (qu'il publia en 1931). Je me permets de vous rappeler son résultat : toute axiomatique (la base d'une mathématique) consistante (non contradictoire) dans la théorie des nombres[i] est incomplète, c'est-à-dire conduit néanmoins à des propositions vraies quoique indémontrables : il n'est pas possible (et il ne le sera jamais), sur la base des axiomes initiaux, de déterminer par une série de déductions

[i] La théorie des nombres, qui ne concerne que des propriétés des nombres entiers, semblait à l'abri d'une telle déroute : les *Principia Mathematica* formaient jusqu'à Gödel un bastion imprenable. Pour pouvoir générer une proposition autoréférentielle dans la théorie des nombres, il fallait qu'une assertion de cette théorie puisse concerner non pas des nombres, mais des propositions de la théorie des nombres. Le génie de Gödel fut de générer un code qui permette qu'un nombre représente une proposition... le tour était joué ! Son procédé d'"arithmétisation de la syntaxe" permet d'exprimer la syntaxe logique à l'intérieur même de l'arithmétique, en terme de nombres. Au sujet de Kurt Gödel, voir l'annexe 2.

« logiques » si cette proposition est vraie ou fausse. Ceci fit probablement le désespoir de ce cher David Hilbert (1862-1943) et de tout un XIX^{e} siècle de grand rationalisme, qui auraient tant aimé que les mathématiques fussent une science exacte… Mais de certitudes, point : choisir une décision pour la proposition non-décidable et la rajouter aux axiomes constitutifs constituerait bien une nouvelle mathématique, mais celle-ci à son tour engendrerait inexorablement une autre indécidabilité…

A moins que la dite proposition indécidable ne soit *à la fois* vraie et fausse ? Voici qui nous ramène à la deuxième limitation et au refus du paradoxe : sommes-nous certains que le même objet ne puisse être en même temps et vrai et non-vrai ?

Le paradoxe provient typiquement de notre pensée dualiste : à preuve, ce petit texte tiré de l'ouvrage remarquable de Douglas Hofstadter [Gödel Escher et Bach, les Brins d'une Guirlande Eternelle, p. 282] et intitulé « le combat du Zen contre le dualisme ». Je vous le laisse méditer, ce type d'enseignement par « kōan » (ou *gong an* dans le *chan* chinois) me semble suffisamment décoiffant pour des habitués de nos universités[ii]. Si le premier kōan vous semble obscur, passez à son commentaire ; si cela s'agrave au lieu de vous aider, passez au poème ; s'il reste un doute, dites-vous que vous n'êtes pas seul dans ce cas…

Kōan

Shuzan sortit son bâton et dit : « si vous appelez ceci un bâton, vous ignorez le fait. Alors, comment voulez-vous appeler ceci ? »

Commentaire de Mumon (maître zen, 1183-1260)

Si vous appelez ceci un bâton, vous vous apposez à sa réalité. Si vous ne l'appelez pas un bâton, vous ignorez le fait. On ne peut l'exprimer avec des mots et on ne peut l'exprimer sans les mots. Alors dites rapidement ce que c'est.

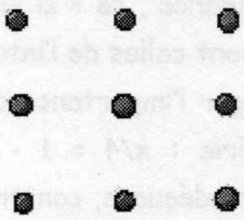
Poème de Mumon

En brandissant son bâton,
il a donné un ordre de vie ou de mort.
Le positif et le négatif entrelacés
même les Bouddhas et les patriarches
ne peuvent échapper à cette attaque.

[ii] Pour comprendre ce à quoi vous avez échappé, laissons parler Claude Grégory, fondateur de l'Encyclopedia Universalis : « *Le gong an est une histoire, une affaire, une situation énigmatique en ce qu'elle exige une réponse dont elle ne contient pas les données. Il s'expose en un très court récit - quelques phrases, voire une seule - ou en quelques répliques. Une absurdité parfois cocasse en est, dans maint cas, la caractéristique. Imposée par le maître, l'énigme place le disciple dans l'urgence d'un questionnement pressant et dans l'impossibilité de découvrir quelque issue que ce soit à ce qui est d'abord une incarcération mentale et qui devient vite une ordalie. A supposer qu'une explication soit produite, ce qui arrive fréquemment du fait que l'étudiant croit avoir à vaincre la difficulté par une paraphrase, elle est toujours et systématiquement rejetée.* »
Et ce n'est pas tout : « *Au cours d'entretiens privés souvent orageux, parfois agrémentés de coups, le maître s'efforce de mettre à la dérive son laborieux disciple, que ce soit par l'émotion et par la colère ou que ce soit par la détresse, par le désespoir où le malheureux est poussé. Accablante pour l'intellect, l'imperméabilité d'un problème qui n'a apparemment ni queue ni tête est inlassablement opposée et pour ainsi dire ravivée par le maître.* »
Mais voici le dénouement : « *jusqu'au moment où le disciple, investi, hanté corps et esprit par l'insolubilité de ce qu'il porte maintenant en lui comme un poison torturant, comprend brusquement, sans le secours du raisonnement : le questionnement est absurde en effet ; il n'a pas de solution ; il n'était que le moyen de provoquer et d'entretenir l'interrogation plénière au détriment de toute autre attitude. Ce qu'attend le maître, ce qu'il cherche à susciter chez son élève, dans une tension difficile à supporter pour certains, c'est littéralement l'explosion du signifiant, c'est la délivrance du sens d'être : c'est par là, tout à coup, une réconciliation avec ce qui n'avait jamais été séparé. Perdu pendant sa recherche dans un puits d'obscurité, le disciple revoit soudain le jour, mais, dit-on, il ne le voit plus comme avant.* » Ce « dit-on » final laisse rêveur quant aux garanties de la méthode, non ?

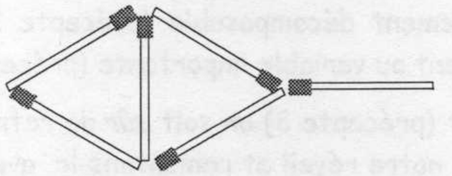
C'est la récré... Pour vous donner une modeste illustration (bien métaphorique il est vrai, puisque l'illumination du *Satori* ne fait pas encore partie de mon quotidien), voici quelques exercices amusants et qui, selon moi, illustrent assez bien le dépassement de nos bonnes vieilles habitudes dualistes.

Voici 9 points, reliez-les par 4 traits droits au maximum et en dessinant sans relever le crayon :



Oui c'est vrai, cher correspondant, celle-ci est bien connue... Mais n'empêche que sa moralité est assez pertinente, non ?

Bon, je ne vous sens pas entièrement convaincu... Alors pour la suivante, prenez 6 allumettes (ou des cure-dents, ça marche aussi) et disposez-les comme suit :

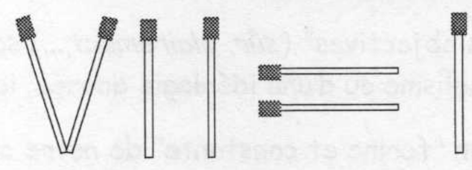


Puis, en bougeant au maximum 3 allumettes, constituez 4 triangles équilatéraux et seulement 4. C'est plus difficile, non ? Et pourtant, la moralité est la même...

Pourquoi résister à rajouter un bonus, bien que la morale de ce qui suit est plus lointaine de notre propos ? C'est Saad, un conducteur de dromadaires dans le désert saharien, qui me l'a apprise... Je vous la livre telle-quelle (sacré chamelier, non ?)

« dans un champ, 5 rangées de 4 palmiers, 10 palmiers »

Toujours sans aucun rapport, un autre petit exercice sur base d'allulmettes : comment bouger une seule allumette, pour que cette équation fausse (en chiffres romains) devienne vraie ?



Et encore, trouvez la suite de la série (là, c'est ma nièce qui me l'a apprise, elle avait 12 ans) :

1
1 1
2 1
1 2 1 1
1 1 1 2 2 1
3 1 2 2 1 1
1 3 1 1 2 2 2 1

(fin de la récréation)

Avant de pouvoir clore cette réflexion sur la complication, j'aimerais vous entretenir des questions que m'a posé la mise en pratique des préceptes cartésiens. Certes, je ne me sens pas vraiment habilité à critiquer l'illustre René, mais je voudrais soulever certaines réserves quant à l'opérationnalité de ses quatre préceptes.

Pour me donner un peu d'audace, je commencerai par la réflexion d'un illustre aîné, dont l'œuvre est tout de même plus significative que mon petit *pensum* épistolaire : Leibniz lui-même apporte une critique au précepte d'évidence , ce « si clairement et si distinctement » qui suppose une intelligibilité dont les limites sont celles de l'intuition humaine. Leibniz reproche aux règles de la méthode cartésienne de négliger l'importance du symbolisme. Ainsi, il est amené à définir $\pi/4$ par un développement en série : $\pi/4 = 1 - (1/3) + (1/5) - (1/7)$... Cette expression n'est qu'approximative mais elle est adéquate, constructive... bref efficace ; elle ne lui demande pas d'idée « claire et distincte » de l'objet de la définition. L'intelligibilité est désormais mesurée par la constructivité et non plus par une intuition intellectuelle.

Voilà pour Leibniz, voyons maintenant pour votre serviteur !

Un objet ou un phénomène ne peut être réductible à un modèle "compliqué" qu'à condition :

a) qu'il soit complètement décomposable (précepte 1), c'est-à-dire qu'on soit *sûr* de n'avoir oublié aucun élément ou variable importante (précepte 4 : Exhaustivité !) ;

b) qu'en recomposant (précepte 3) on soit *sûr* de retrouver le même objet ou phénomène qu'au début (démontons notre réveil et remontons-le, avec un peu de chance il pourra fonctionner à nouveau ; mais creusons un trou dans notre jardin, et rebouchons-le avec la même terre... il est peu probable que notre pelouse retrouvera son aspect initial... il y a généralement trop de terre – j'espère que pour votre réveil aucune pièce ne sera de trop !) ;

c) que les effets s'expliquent régulièrement par des causes *clairement* identifiables (précepte 1 : Evidence), ce qui n'est pas forcément le cas de nos définitions mathématiques modernes, qui utilisent largement des formulations *implicites* (c'est la remarque de Leibniz) ;

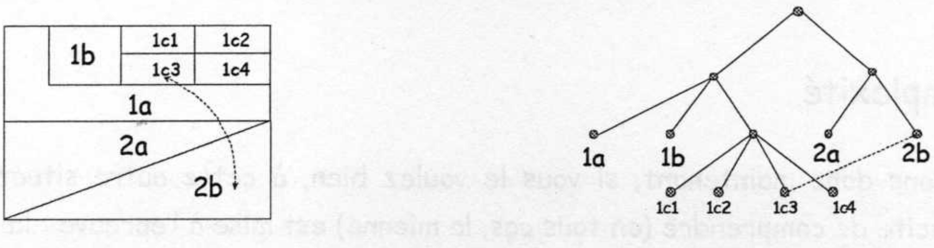
d) que l'exhaustivité reste exploitable, c'est à dire qu'elle ne génère pas d'explosion combinatoire : tester exhaustivement le bon fonctionnement du processeur qui équipe mon micro-ordinateur, en vérifiant chacune de ses combinaisons logiques, ... demanderait tout de même quelques milliards d'années ;

e) que les "évidences objectives" (*sûr*, *clairement*,...) soient précautionneusement situées dans le cadre d'un formalisme ou d'une idéologie donnée, identifiée.

De plus, si la résolution "ferme et constante" de notre célèbre aîné m'a semblé convaincante, et sa méthode, pertinente, que de déboires nous réservons-nous encore à tenter de la mettre en pratique ! Car le manuel, vous l'avez remarqué, ne nous précise pas le "comment" du procédé...

Ainsi, dans le cas d'un phénomène social, comment nous y prendrons-nous pour décomposer notre objet ? Considérant qu'il est un ensemble d'individus en interaction, devrons-nous faire l'étude psychologique de chacun, ainsi que de leurs relations ? L'exhaustivité en prendrait un coup... Ou bien, utilisant le même stratagème que Ludwig Boltzmann qui retrouva le second principe de la thermodynamique à partir des lois statistiques sur les mouvements des molécules, ferons-nous usage de sondages pour laisser décider les grands nombres ? Dans notre cas sociologique, je doute pourtant que la réussite de notre recomposition soit assurée : que donneront les lois de la psyché individuelle lorsque nous leur demanderons des comptes au niveau macroscopique du social, elles qui sont tout au plus applicables au niveau microscopique, et encore ? Autrement dit, le libre-arbitre et des individus, placés entre leur libido freudienne, leur désir de puissance adlérien, leur *imago dei* jungienne, … sera-t-il déterminant pour répondre à la question d'une guerre, par exemple, qui va à l'encontre de ses intérêts et de sa survie propre, et ne peut se concevoir qu'à un niveau d'ensemble : que dire de cette notion de « donner sa vie pour la patrie » (même si elle en est reconnaissante) ? A moins que l'instinct de suicide ne devienne une nouvelle école psychanalytique, partagée par tous ceux qui s'en furent au combat…

Décidément, cette recomposition cartésienne me crée des soucis, d'autant plus que son auteur, loin d'être un sot, avait prévu les cas non triviaux en nous proposant de considérer aussi les relations *entre ceux qui ne se précèdent point naturellement*… Ce qui veut dire que nous passons de l'arbre au treillis (je vous ai fait un dessin à ce propos, je le recopie ici) et que le nombre de combinaisons ne cesse donc de s'accroître. Cela ne vous donne-t-il pas le vertige de penser aux quelques 10 milliards de neurones interconnectés dans votre corps ?



vision plane *vision hiérarchisée*

Comment savoir le nombre de *parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre* ? Et même, serons-nous assurés que l'analyse d'une parcelle ne nous en ouvrira pas une multitude d'autres ? Pouvons-nous encore, avec certains physiciens, entretenir l'espoir de retrouver l'idéal grec de l'*atome*, particule élémentaire et indivisible, alors qu'à partir de son noyau nous inventons toujours de nouveaux mésons, pions et autres quarks ? Et comment dans ce cas prétendre à l'exhaustivité de nos *dénombrements si entiers et des revues si générales* ?

Et puis enfin, suis-je assuré que, quelle que soit la façon dont je m'y prendrai pour décomposer (car il y en certainement plusieurs), le résultat aboutira à la même explication « après recomposition » ? Pour ma gouverne personnelle, j'ai cherché ma réponse à l'évolution des espèces auprès de plusieurs spécialistes, partant hiérarchiquement du niveau le plus détaillé jusqu'au plus global (comme l'eût positivement fait Auguste Comte au siècle dernier, et cherchant en cela à m'inspirer de la recomposition cartésienne). Tous m'ont répondu avec grande compétence : le biologiste moléculaire m'a parlé d'acide désoxyribonucléique, avec de grands gestes en forme d'hélices ; son voisin d'étage, biologiste, m'a résumé quelques expériences de mutation de ses drosophiles ; l'anthropologue, lui, m'a parlé de Charles Darwin, de fonction et d'organe (mais je crois bien qu'il lui manquait un chaînon…) et sa sympathique consœur Anne Dambricourt l'a vaillamment contredit en m'entretenant de systèmes dynamiques non-linéaires pour la modélisation des évolutions crâniennes de nos lointains cousins anthropoïdes. Personne ne m'a parlé de Rupert Sheldrake et de champs morphogénétiques, mais un ancien camarade de promotion devenu jésuite m'a fait redécouvrir Pierre Teilhard de Chardin et son point Oméga… Bien que leurs réponses fussent toutes différentes, apparemment séparées et parfois contradictoires, tous s'accordaient cependant, sur un point : ils répondaient à la même question. Je me suis un instant demandé comment y retrouver mon Descartes…

Alors, et voilà la question brutalement résumable, le tout est-il réductible à la somme de ses parties ?

Si oui, nos quatre préceptes sont de brillants scalpels… pour disséquer un réel d'artéfacts, prévisibles car conçus et maîtrisés par l'homme.

Si non, et c'est le cas du vivant, une alternative doit être trouvée.

… et si à la fois oui et non ? Alors la question, pour abrupte qu'elle soit, n'est pas réductible à une réponse. Ceci nous amène à une autre discussion, concernant cette fois la *complexité*.

Complexité

Passons donc maintenant, si vous le voulez bien, à cette autre situation dans laquelle notre capacité de comprendre (en tous cas, la mienne) est mise à l'épreuve : la complexité.

Henri Atlan en a donné un résumé que j'ai trouvé très éclairant, je ne résiste pas au plaisir de vous le citer : il fait aussi partie de l'ouvrage dont je vous ai parlé.

> *« La complexité est reconnue comme une notion négative : elle exprime qu'on ne connaît pas, ou qu'on ne comprend pas un système, malgré un fond de connaissance global qui nous fait reconnaître et nommer ce système. Un système qu'on peut spécifier explicitement, dont on connaît la structure détaillée, n'est pas vraiment complexe. Disons qu'il peut être plus ou moins compliqué. La complexité implique qu'il y ait une perception globale, avec en même temps la perception qu'on ne la maîtrise pas dans ses détails. C'est pourquoi on la mesure par l'information qu'on ne possède pas et dont on aurait besoin pour spécifier le système en ses détails. »*

Déplier notre *origami* de tout à l'heure était peut être compliqué : le plier sans modèle est bien pire : c'est complexe.

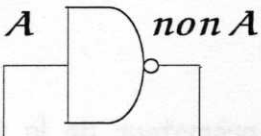
La complexité est peut-être plus encore humiliante pour nos présomptueux esprits car, par surcroît, elle ne dépend même pas du nombre d'éléments que nous aurons à considérer : il arrive qu'à peine un ou deux constituants suffisent à ma déroute. Humiliante mais attirante… Par exemple, cette bascule logique que l'on appelle contradiction, comme le paradoxe que l'on attribue à l'antique philosophe Epiménide :

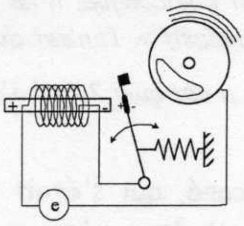
« cette phrase est fausse »

ou bien ses sœurs siamoises :

« la phrase suivante est fausse : la phrase précédente est vraie ».

Je pourrais aussi la dessiner comme dans nos vieux cours de logique sous la forme de la « boucle étrange » suivante, réalisable avec un minimum d'électronique (cherchez-bien à la comprendre, elle vaut vos petits jeux de cubes visuels), ou bien, en sortant notre artillerie électro-mécanique, ce relai auto-alimenté faisant office de sonnette :





ou bien encore, paraphrasant William et son Hamlet, « *to be and not to be* ». Voilà qui heurte mon sens aristotélicien de la non-contradiction, *isn't it* ?

Exemples un peu triviaux ? Pourtant, les systèmes vivants nous opposent incessamment ce genre de paradoxe, sans compter celui de la poule et de l'œuf… Il s'agit en fait de propositions auto-référentes, ce qui signifie qu'elles parlent d'elles-mêmes.

Bertrand Russell

C'est d'ailleurs pour éviter l'apparition de tels paradoxes dans les mathématiques que Russell et Whitehead ont bâti les *Principia Mathematica*, ouvrage que Douglas Hofstadter (dans son « Gödel, Esher et Bach, les brins d'une Guirlande Eternelle ») qualifie de *« gigantesque entreprise d'éradication des boucles étranges de la logique, de la théorie des ensembles et de la théorie des nombres »*.

Tout cela était parti de la théorie des ensembles, fondée par Cantor en 1880[iii].

En 1903, cette théorie ensembliste commençait à rencontrer un certain succès, lorsque Bertrand Russell lui opposa son fameux paradoxe, dans lequel l'autoréférence se trouvait confrontée à la non-contradiction et au tiers exclus (encore ces deux là, me direz-vous !) :

- *Un ensemble auto-inclusif (on devrait plutôt dire : auto-appartenant) est un ensemble qui est aussi un de ses éléments (on pourrait aussi écrire E∈ E, ce qui est assez différent de E⊂ E, non?). Par exemple, l'ensemble des ensembles est un ensemble. L'ensemble « tout sauf Jeanne d'Arc » est auto-inclusif : il n'est pas Jeanne d'Arc (sauf erreur de ma part).*
- *La plupart des ensembles ne sont pas « auto-inclusifs ». Ils sont « non-auto-incusifs », ou encore… quelconques (et c'est plus simple). Exemple : l'ensemble des baleines n'est pas une baleine. L'ensemble des baleines est quelconque.*
- *Notre amie la Non-contradiction nous affirme : « aucun ensemble ne peut être à la fois auto-inclusif et quelconque ».*
- *Son compère le Tiers exclus ajoute : « soit un ensemble est un élément de lui même, soit il ne l'est pas ».*
- *Donc tout ensemble doit être auto-inclusif* ou *quelconque. Voilà donc un beau « xor ».*

iii au sujet de Georg Cantor et de son œuvre, voir l'annexe 1.

- *Soit Q l'ensemble des ensembles quelconques. Q est-il quelconque ou auto-inclusif ? Eh bien, cher correspondant, il n'est ni l'un ni l'autre.*
- *En effet, s'il est auto-inclusif, cela signifie que « l'ensemble des ensembles quelconques est quelconque ». Il n'est donc pas auto-inclusif.*
- *S'il est quelconque, il ne se contient pas lui-même, et « l'ensemble des ensembles quelconques est auto-inclusif ». Il n'est donc pas quelconque.*
- *Alors, il est quoi ? Pathologique ?*

Henri Poincaré, qui s'était fait jusque-là le promoteur de la théorie des ensembles, jugea qu'elle devait être mise au placard (bien qu'il ne le dît pas aussi crûment que je le fais…). L'algébriste Richard Dedekind (grand ami de Georg Cantor) arrêta de publier ses travaux sur la théorie des nombres. Le paradoxe de Russell fit ainsi une irruption remarquée dans le monde des mathématiciens, remarquée de façon souvent fort déplaisante : Gottlib Frege, un Allemand qui terminait de rédiger un livre sur la fondation de l'arithmétique par la théorie ensembliste, en témoigne dans sa postface :

« Un scientifique peut difficilement être confronté à une situation plus désagréable que celle de voir les bases de son travail disparaître au moment précis où ce travail est achevé. J'ai été mis dans cette situation par une lettre de Bertrand Russell, alors que le livre était quasiment sous presse. »

Cantor avait déjà soulevé, dès 1899, le paradoxe lié à "l'ensemble de tous les ensembles", qui (s'il a un sens) doit être plus gros que l'ensemble de ses parties. Or, il avait démontré que l'ensemble des parties de tout ensemble E était plus gros que E… L'ensemble de tous les ensembles devrait donc, en tant qu'ensemble particulier, être plus petit que l'ensemble de ses parties !

Dire qu'un ensemble est un regroupement d'objets ne suffisait plus : Ernst Zermelo, en 1908, puis Abraham Fraenkel, ont proposé une restriction à la notion d'ensemble permettant de résoudre cette antinomie.

La théorie Zermelo-Fraenkel comprend 7 axiomes :

Identité : Deux ensembles sont identiques s'ils ont les mêmes éléments

Réunion : si E est un ensemble, la réunion des éléments de E est aussi un ensemble : ainsi, si $\{\{1,2,3\}, \{x,y\}\}$ est un ensemble, alors $\{1,2,3,x,y\}$ aussi.

Parties : Le regroupement des sous-ensembles de E est un ensemble : ainsi, si $\{1,2\}$ est un ensemble, $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ aussi.

Compréhension : si P(x) est une propriété et E un ensemble, alors le regroupement des objets x de E qui vérifient P est aussi un ensemble.

Remplacement : Si, pour tout objet x d'un ensemble E, il n'existe qu'un seul y tel que la propriété P(x,y) soit vraie, alors le regroupement des objets y ainsi associés aux x de E est aussi un ensemble. Ceic permet de former des paires, c'est-à-dire d'affirmer que si E et F sont deux ensembles, alors $\{E,F\}$ aussi.

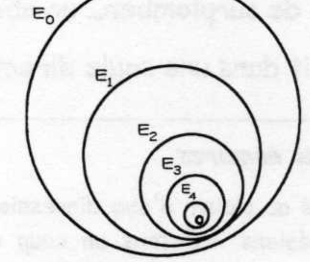
Infini : Il existe un ensemble infini, comportant un sous-ensemble différent de lui-même et aussi gros que lui.

Choix : Si E est un ensemble d'ensembles non vides, le regroupement constitué d'un élément de chaque ensemble appartenant à E est un ensemble.

Ces axiomes de Zermelo-Fraenkel permettent de démontrer l'existence de l'ensemble vide $\emptyset$ et de ramener tout objet mathématique à un ensemble. Par exemple, on peut définir les nombres entiers (naturels !) comme $0=\emptyset$, $1=\{\emptyset\}$, $2=\{0,1\}$, $3=\{0,1,2\}$, etc. Et surtout, l'axiome de compréhension, qui ne vaut que si E est un ensemble, évite de former de trop gros ensembles et écarte les paradoxe comme ceux de "l'ensemble des ensembles", ou celui de Russell car "E appartient à E" est exclu de la grande famille des ensembles.

En 1925, von Neuman propose même un axiome supplémentaire, dit "axiome de la *fondation*" :

Fondation : Il n'existe pas de chaîne infinie descendante d'ensembles (emboités, comme la suite ... $E_n \in E_{n-1} \in E_{n-2} ... \in E_2 \in E_1 \in E_0$).



Ceci conduit à la théorie dite "ZF" si on remplace le choix par la fondation, ou à "ZFC" si on les garde tous. Dans ces théories, on proscrit dont explicitement toute existence d'un ensemble E qui appartiendrait à E.

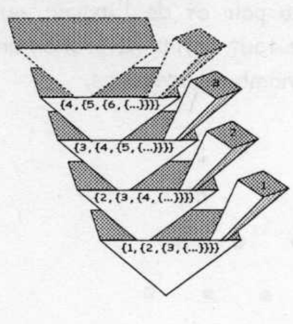
L'axiome de fondation ne se résume pas aux précédents mais n'apporte rien au tableau de la chasse aux paradoxes : comme dit Jean-Paul Delahaye[iv], "on conjure donc, une seconde fois, le paradoxe de Russell"... qui était déjà exclu par l'axiomatique Zermelo-Fraenkel !

Etrangement, l'intérêt de l'axiome de fondation pourrait provenir de sa négation : d'autres mathématiciens, comme P. Aczel (1987), ont pris le contrepied de l'intention de von Neuman et ont proposé d'imposer, en tant qu'axiome, l'existence d'ensembles appartenant à eux-mêmes.

Antifondation : Par cet axiome, il existe des ensembles appartenants à eux-mêmes, et chaque description d'ensembles par des équations comme $\Omega = \{\Omega\}$, ou $U = \{\varnothing, \{U,1\}\}$,... possède une solution unique.

De tels ensembles sont appelés "hyper-ensembles" (il est vrai qu'ils sont franchement gros...) ou "ensembles antifondés".

Il existe ainsi un ensemble Ω totalement auto-inclusif, tel que $\Omega = \{\Omega\}$, mais aussi un ensemble infiniment profond : {0, {1, {2, {3, {4,...}}}}} (petits dessins ci-dessous).



$\Omega = \{\Omega\}$ {0, {1, {2, {3, {4,...}}}}}

Exploiter le paradoxe de Russell pour inventer des nouveaux ensembles qui se contiennent eux-mêmes...

Nous voici en passe de travailler sur des ensembles tout aussi aberrants (antifondés, c'est dire !)... qui pourtant servent, en informatique fondamentale, à modéliser des problèmes d'échanges de données et de systèmes communicants... bref, des ordinateurs interconnectés !

Comme un jour Cardan s'est mis à travailler sur des nombres négatifs (j'y reviendrais en aparté d'ici quelques lignes) ou à accepter l'idée de nombres "impossibles" dont le carré serait négatif, comme Cantor le dit à propos de ses propres recherches : «Je le vois, mais je ne le crois pas», ainsi en va-t-il de l'intégration de ces nouveaux concepts, qui au départ semblent scandaleux : à force de les manipuler, ils nous deviennent familiers et prennent une réelle consistance.

---

iv un collègue lillois : "Logique; informatique et paradoxes", J.-P. Delahaye, Belin - pour la science, 1999.

Cher correspondant, nous nous sommes déjà rendu compte que nos mathématiciens bien-aimés se moquent éperdument du bon sens et que, à chacun de leurs progrès, ils mettent une rallonge au plongeoir qui nous permet de surplomber... un abîme de perplexité !

Et si encore le plongeoir allait dans une seule direction...

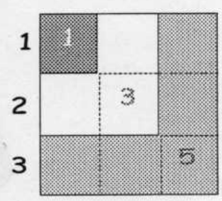
Petit aparté au sujet des nombres

Cher ami, je ne résiste pas au plaisir d'une digression supplémentaire... puisque nous sommes entre nous, pourquoi rester cartésiens ? Jetons un coup d'œil aux nombres que nous ont inventés nos seigneurs les mathématiciens, et aux dénominations qu'ils leur ont données : tout pouvait sembler simple dans les temps antiques : en tout cas, cela peut nous sembler simple aujourd'hui ! Les nombres étaient « naturels ». Avec les siècles, ils sont devenus rationnels, relatifs, irrationnels, transcendants, transfinis...

ℕ - les naturels

Les commerçants de l'Antiquité manipulaient des nombres : 1 pomme, 2 pommes ou 10, on peut toujours en faire un tas. C'est l'ensemble ℕ des *entiers naturels*, ceux qui nous semblent si naturels que nous pouvons compter sur nos doigts. Ces nombres entiers naturels ont été associés, dans la plupart des civilisations disposant d'une écriture, aux pratiques religieuses : ceci correspond bien à cette fascination que les nombres exercent sur l'esprit humain. C'est au sein de l'école pythagoricienne, caractérisée par une mystique forte, que l'étude de leurs propriétés a reçu ses premières systématisations. Cette école reliait bien sûr les nombres aux figures, comme ci-dessous la "sainte tétraktys" sur laquelle étaient jurés les serments de confidentialité les plus solennels (elle est associée au nombre 4, au triangle et au 10, qui n'est autre que la "divine décade"... 1+2+3+4). Les pythagoriciens savent déjà que, comme le montre le dessin ci-dessous pour n=2, $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$. Ils étudient les catégories du pair et de l'impair, qui aboutiront plus tard à l'exposé d'Euclide démontrant la décomposition de tout entier naturel en un produit (unique) de facteurs premiers, ainsi que l'existence d'une infinité de nombres premiers.

la tétraktys



$(1+3+5 = 3^2)$

ℚ - les rationnels (ex-«rompus»)

Si notre Grec antique mangeait trois pommes de sa caisse de douze (sûrement pas des Golden ni des transgéniques à l'époque), il pouvait concevoir qu'il ne lui restait plus que trois quarts du stock. Ces nombres restaient encore raisonnables, qui étaient le rapport (on disait « la raison ») de deux nombres entiers naturels, et font aujourd'hui partie de l'ensemble ℚ des nombres *rationnels*. Au XVII^e siècle, ces nombres étaient dits « rompus », c'est-à-dire fractionnaires, tirés d'une opération de division.

Ils permettaient aussi de définir la gamme musicale : l'intervalle d'octave est obtenu en pinçant une corde en sa moitié, l'intervalle de quinte en son tiers... mais, ici, j'éviterai de vous lasser en entreprenant cette sorte de musique !

$\mathbb{Z}$: les relatifs, ex-«imaginaires»

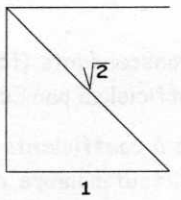
Par contre, même affamé, comment voulez-vous retirer 8 pommes d'un tas de 5 pommes ? Jusqu'au XVIe siècle (époque du renouveau des mathématiques en Europe), les nombres négatifs (que nous appelons aujourd'hui les entiers *relatifs*, ensemble $\mathbb{Z}$) n'étaient pas manipulés dans les calculs, ni donc envisageables par le monde des philosophes (les mathématiciens n'existaient pas encore en tant que tels). Jérôme Cardan (1501-1576) qualifia d'*imaginaires* les nombres négatifs qu'il commença, le premier, à considérer de façon systématisée. Cependant, la manipulation de nombres négatifs n'en était qu'à ses balbutiements puisqu'il considérait toujours des équations comme :

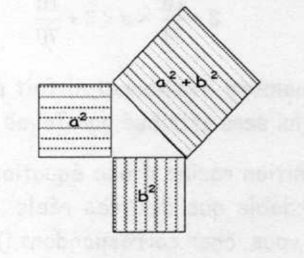
$$x^3 + ax = b \qquad \text{et} \qquad x^3 = ax + b,$$

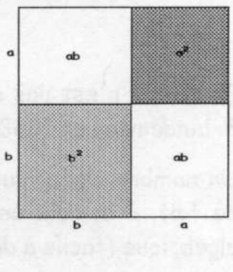
comme faisant partie de deux classes distinctes !

$\mathbb{R}$ - les réels irrationnels (ex-«sourds»)

Pythagore[v] monta peut-être sa célèbre secte pour préserver et transmettre le secret de nombres *irrationnels*, qui interviennent directement en géométrie : si un triangle (un tricorne, comme on disait à l'époque de Pascal[vi]) possède deux cotés de chacun 1 mètre (qui, bien sûr, n'existait pas dans l'Antiquité) formant un angle droit, quelle est la longueur du troisième côté ? Vous savez bien qu'il fait $\sqrt{2}$ mètre, puisque vous avez baigné tout jeune dans le théorème de Pythagore... Mais avouez que $\sqrt{2}$ est un nombre difficile à appliquer aux pommes. Irrationnel, dirons-nous, car non réductible à un rapport de deux nombres entiers, même grands. Faut-il pour autant être dénué de raison pour y croire ?







Un nombre irrationnel, *le "théorème de Pythagore"* *et un lien entre algèbre et géométrie.*

Dans ses « Eléments », Euclide déclare, à propos de ce fameux $\sqrt{2}$, que « tout ce qui est irrationnel et privé de forme doit demeurer caché. Que si quelque âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants.»

La célèbre "section dorée" (ou nombre d'or), rapport entre la diagonale du pentagone régulier et son côté, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et qui fit adopter ce même pentagone comme symbole de reconnaissance entre disciples de la secte) semble tout de même mériter assez bien son appartenance aux irrationnels, puisque ce nombre de fous s'écrit aussi :

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}} \approx 1.618033\dots$$

et vérifie pour tout entier n la propriété des suites de Fibonacci[vii] :

$$\Phi^2 = \Phi^1 + \Phi^0,\ \Phi^3 = \Phi^2 + \Phi^1,\ \dots,\ \Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$$

---

v *(source: Encyclopedia Universalis)* "Il n'est guère, dans l'Antiquité, de figure plus mystérieuse que celle de Pythagore, ni qui ait posé de problèmes plus embarrassants aux historiens. Il passe pour n'avoir rien écrit, et sa pensée ne fut sans doute connue jusqu'à l'époque de Socrate que par une tradition orale, elle-même entourée de secret. Les documents qui permettent de la conjecturer émanent pour la plupart des néo-pythagoriciens de la fin de la République et des quatre premiers siècles de l'ère chrétienne, eux-mêmes connus à travers le néo-platonisme. En outre, Pythagore est devenu très tôt, peut-être même de son vivant, une figure de légende: on le dit fils d'Apollon, descendu aux Enfers, doué d'ubiquité, et faiseur de toutes sortes de miracles. Une extraordinaire affabulation, qui ne cesse de se développer au cours des siècles, entoure son personnage. Ainsi est-il déjà une énigme pour Aristote, qui évite le plus souvent de prononcer son nom, pour ne parler que de «ceux qu'on appelle pythagoriciens»."

vi Au XVIIe siècle, les segments de droite étaients des *bâtonnets*, les cercles des *piecettes*, les rectangles des *tables* et les triangles, des *tricornes* !

vii Léonard de Pise (1180-1240), dit Fibonacci car fils de Bonacci.

Après Pythagore, dont on dit qu'il disait… que "tout est arrangé par le Nombre", vient l'époque d'Euclide, Archimède, Appolonius… qui abordent encore les mathématiques sous l'angle géométrique[viii]… comme l'illustrent les petits exemples que j'ai dessinés ci-dessus et dont le troisième correspond bien sûr à la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (qui n'existait pas exprimée en termes de surfaces). Par exemple, Euclide étudia en détail les nombres du type $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

Au XVI^e siècle, les irrationnels sont les nombres « sourds », peut-être parce que « ab-surdes » ? C'est l'époque de l'universel Leibniz[ix], qui écrit que ces abstractions « ont ceci d'admirable que, dans le calcul, elles n'enveloppent rien d'absurde ou de contradictoire et que cependant elles ne peuvent être présentées dans la nature concrète des choses »…

$\mathbb{R}$: les transcendants (réels non algébriques)

Un autre nombre irrationnel auquel se heurtèrent nos premiers géomètres est π, rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle, sur lequel ils tombaient naturellement en faisant rouler des barriques au sol pour mesurer des distances, et qui aurait été bien utile pour calculer plus précisément le volume de grain engrangé dans un silo circulaire. Archimède (287-212 av. JC), grand ingénieur de son temps, est le premier à avoir proposé un algorithme de calcul de la « raison [au sens, rapport] de l'aire d'un cercle au carré de son rayon », soit $\pi = \frac{S}{r^2}$, basé sur des polygones se rapprochant de plus en plus du cercle (bref, la quadrature du cercle). Il en propose aussi l'encadrement :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}.$$

En fait, π n'est pas seulement un nombre irrationnel, il fait partie des transcendants (fait établi par F. Lindemann en 1882). Son nom (π) lui sera attribué par Jones en 1706 et officialisé par Euler[x].

Un nombre algébrique est par définition racine d'une équation polynomiale à coefficients entiers. De ce fait, il semble un peu plus abordable que d'autres réels. Par exemple, tout nombre rationnel est algébrique (facile à démontrer pour vous, cher correspondant !).

Les autres réels, non réductibles à cette définition, sont dits *transcendants*.

C'est Joseph Liouville qui établit, en 1844, l'existence de ces nombres transcendants : il usa pour cela d'une propriété de "mauvaise approximation" des irrationnels algébriques par les rationnels. Georg Cantor, de son côté, montra en 1873 l'existence des transcendants à partir de son théorème "l'ensemble de tous les nombres réels est non dénombrable", et en montrant que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable[xi]. Ceci revient à dire que, si l'on pointe sur l'axe réel un nombre au hasard (par exemple tirant un développement décimal illimité), il n'a aucune chance d'être algébrique…

C. Hermite donna en 1872 le premier résultat marquant sur les transcendants : en approchant la fonction exponentielle e^x par des fonctions rationnelles, il montrat que e est transcendant, suivi en

---

viii L'algèbre est la théorie des équations comme $x^2 + 1 = 2x$ (équation du second degré, de solution $x = 1$) ou $x^3 + 3x = 4$ (équation du troisième degré, dont Cardan montra que la solution $x = 1$ est aussi égale à $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ = 1… ce qui, vous en conviendrez, n'est pas d'une évidence folle si l'on ne passe pas par l'équation $x^3 + 3x = 4$). Les méthodes algébriques sont apparues chez les mathématiciens arabes en lien avec des problèmes du quotidien, comme le partage d'héritage. La géométrie, quant à elle, visait à construire des objets à l'aide d'une règle et d'un compas. Algèbre et analyse sont liées en ce que construire des objets à deux ou trois dimensions implique de considérer des expressions "non rationnelles", solutions d'équations du 2nd ou 3ème degré.

ix Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716 : mathématicien, philosophe, encyclopédiste, alchimiste, diplomate, juriste… il s'intéresse à la fois à la combinatoire et à la continuité, définissant les règles du calcul infinitésimal (l'infiniment petit). C'est aussi lui qui introduit un grand nombre de notions et notations actuelles, comme les fonctions, explicitement désignées par $y = f(x)$ dans sa correspondance avec Johann Bernoulli. Et il étonna bien Hugens en découvrant que $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$!

x Leonhard Euler (1707 - 1783) et son disciple Joseph-Louis Lagrange font partie des géants qui ont dominé la science du XVII^e siècle : analyse infinitésimale, calcul des variations, séries infinies, mécanique, etc. Euler impose de nombreuses notations, comme les nombres : e de l'exponentielle, l'imaginaire $i = \sqrt{-1}$, le transcendant π (déjà employé par W. Jones en 1706) et leur lien $e^{i\pi} = -1$…

xi Cela se démontre en prouvant que l'ensemble A de tous les nombres algébriques est dénombrable. Pour cela, associons à chaque polynôme à coefficients entiers: $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$, sa *hauteur* $ht(P) = \max_{(j)} |a_j|$. Comme un polynôme n'a qu'un nombre fini de racines, l'ensemble AN des nombres algébriques qui sont racines de polynômes à coefficients entiers de degré N et de hauteur N est un ensemble *fini*; comme A est réunion des AN, pour N = 1, 2, … l'ensemble A est dénombrable. L'ensemble des nombres transcendants n'est donc pas dénombrable ; en termes imagés, on peut dire qu'un nombre pris au hasard (par exemple en se donnant au hasard son développement décimal illimité) n'a «aucune chance» d'être algébrique.

1882 par Ferdinand von Lindemann pour π. Il fallut attendre 1929 pour voir d'autres résultats sur la caractérisation des transcendantaux. Cependant, aucune méthode générale n'a encore été trouvée : on ignore même si la constante d'Euler: $\gamma = \lim_{n \to \infty} (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{n}-\mathrm{Log}\, n)$, est irrationnelle !

$\mathbb{C}$: les imaginaires, ex-«impossibles», et les complexes, ex-«vraiment sophistiqués»

Si Cardan qualifia d'imaginaires les nombres négatifs, il eut (en cherchant à résoudre des équations polynomiales) l'intuition d'autres nombres, qu'il dit *vraiment sophistiqués*, et qui sont nos "complexes" actuels... Notamment, il donna le nom de nombres *impossibles* ceux dont le carré serait (aujourd'hui, « est » ?) négatif. Bien sûr, les manipuler sur la base de dessins géométriques demanderait de concevoir des surfaces négatives, ce qui n'était pas vraiment à l'ordre du jour. Aujourd'hui, ces nombres obtenus à partir de leur prototype $i = \sqrt{-1}$ nous semblent nettement moins impossibles : ils sont même la base de tous les calculs de nos amis physiciens. C'est peut-être pour cette raison que nous les avons rebaptisés nombres "imaginaires"... et complexes lorsqu'ils sont additionnés à un réel.

$\aleph$ et les transfinis

Le concept d'infini mathématique est au départ (avec Aristote) indissocié de celui d'infini ontologique.

Plus tard, lorsqu'il développe le calcul infinitésimal, Leibniz donne à l'infini le statut d'un concept mathématique à part entière. La phase suivante sera celle des travaux de Cantor, en symbiose avec la théorie des ensembles : « avec Cantor, le concept d'infini mathématique sort de sa préhistoire. » *[Jean-Toussaint Desanti, dans l'Encyclopedia Universalis]*

A l'origine, Cantor raisonne dans le domaine de l'analyse, c'est-à-dire sur des ensembles de points : deux ensembles ont même *puissance* s'il est possible de définir, des éléments de l'un vers les éléments de l'autre, une application biunivoque. Cette notion de bijection l'amène à comparer des ensembles de même puissance, « équipotents » (1877). Il est stupéfait d'obtenir des résultats qui semblent contraires à toute intuition, comme par exemple la possibilité d'établir une bijection entre le continu à une dimension et le continu à *n* dimensions («Je le vois, mais je ne le crois pas», écrit-il à son ami Dedekind). Il isole la notion d'ensemble « dénombrable », ensemble de même puissance que $\mathbb{N}$: *« Non seulement l'ensemble des entiers est applicable biunivoquement sur l'une de ses vraies parties (sur l'ensemble des nombres pairs, par exemple; il est «infini» au sens de Dedekind), mais on démontre qu'il est équipotent à l'ensemble des couples d'entiers* ($\mathbb{N}^2$), *à l'ensemble des nombres rationnels* ($\mathbb{Q}$)*et à l'ensemble des nombres algébriques. » [JTD-Encycl.U]*

Cantor choisit de noter $\aleph$, première lettre de l'alphabet hébreu, le nombre cardinal qui désigne cette puissance commune. Il s'agit alors d'étudier la nature de cet objet... qu'il appelle nombre transfini. La puissance de $\mathbb{R}$ (ou « puissance du continu ») est plus grande que $\aleph$, égale à celle du segment [0,1], de $\mathbb{R}^n$ ou du carré $[0,1]^2$. Il la note $\aleph_1$, deuxième transfini, et $\aleph$ sera aussi notée $\aleph_0$.

Plus fort encore : si un ensemble E est de puissance p, l'ensemble des parties de E a une puissance 2^p. Ainsi $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, a une puissance $2^{\aleph}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ une puissance $2^{2^{\aleph}}$, etc.

Question qui se pose alors : si on écrit $\aleph_1 > \aleph_0$, y a-t-il « quelque chose » entre les deux ? Peut-on écrire $\aleph_1 = 2^{\aleph}$, $\aleph_2 = 2^{2^{\aleph}} = 2^{\aleph_1}$... ? Parce que les conséquences étaient très utiles pour l'analyse, Cantor a répondu par l'affirmative : c'est la célèbre « hypothèse du continu ». Comme de nombreux mathématiciens de cette époque, Cantor espérait bien-sûr en trouver la démonstration, ce qui le préoccupa jusqu'à sa mort : en 1962, P.J. Cohen a montré que cette démonstration n'existe pas, et que l'hypothèse du continu fait partie de ces problèmes « indécidables » révélés par Kurt Gödel (1906-1978).

Le caractère tout à fait révolutionnaire de ses recherches est apparu avec netteté à Cantor et il a éprouvé le besoin de se justifier en arguant de la liberté de création du mathématicien: «Je ne vois vraiment pas ce qui pourrait nous retenir dans cette activité créatrice de nouveaux nombres, aussitôt qu'il apparaît que, pour le progrès de la science, l'introduction d'une nouvelle, parmi ces innombrables classes de nombres, est devenue souhaitable ou même indispensable ; [...] sans cette extension je ne peux plus aller de l'avant, avec elle j'atteins toute sorte d'inattendu.» [JTD-Encycl.U]

Nous en étions à la complexité...

Ainsi, la rigueur la plus absolue des *Principia* de Russell et Whitehead aurait dû mettre nos mathématiques à l'abri des boucles auto-référencielles et de leurs paradoxes : mais Kurt Gödel[xii] cassa l'édifice et en montra le talon d'Achille.

Bien difficile début de XXe siècle : voilà que les contradictions s'insinuent partout (ainsi de ces particules à la fois onde et corpuscule en physique) et que l'indécision gagne le plus profond de la matière elle-même : souvenez-vous de ce Nobel qu'obtint Werner Heisenberg en 1936 avec son principe d'incertitude : pour lui, position et quantité de mouvement ne peuvent être simultanément connues pour une même particule... Si nous choisissons de déterminer exactement l'une (en la mesurant, par exemple), l'autre sera complètement indéterminée.

Nous vivons dans un monde bien étrange, bien complexe...

J'ai lu chez Jean-Claude Lugan *[La systémique sociale, Que sais-je ?]* une autre caractérisation de la complexité : pour lui, un phénomène complexe est un phénomène que l'on tient par définition irréductible à un modèle fini, aussi sophistiqué soit-il.

De même, pour Edgar Morin *[introduction à la pensée complexe - 1990]*, est complexe ce qui ne peut se résumer en un "maître mot", ce qui ne peut se ramener à une loi, ce qui ne peut se réduire à une idée simple.

La notion de complexité implique :

- la possibilité d'imprévisibilité (ou, ce qui en pratique revient au même, une prévisibilité non calculable), donc d'*incertitude* ;
- l'émergence plausible du *nouveau* et du *sens* au sein du phénomène ;
- la possibilité de phénomènes *paradoxaux* (par exemple, l'un *et* le multiple : la société constituée de volontés individuelles, la matière et la physique quantique, le tout -on s'en souvient- n'étant pas forcément réductible à la somme de ses parties) ;
- l'*inséparabilité* de certains éléments, c'est-à-dire l'indécomposabilité du système en éléments simples, identifiables et stables.

L'étymologie vient une fois de plus en renfort : *cum-plexus* (de *plectere*, entrelacer, je me permets de faire l'érudit auprès de vous bien que le mérite en revînt au dictionnaire) nous donne cette idée de tisser, d'enchevêtrer. Regardez en physiologie nos différents plexus nerveux : plus que tissages, ils sont d'inextricables réseaux de communication... Qui plus est, Sigmund Freud, ses collègues et leurs complexes ont donné au mot une fréquence d'usage... à la hauteur des difficultés posées et de la *perplexité* qu'il génère en nous !

<u>*complexité <-> perplexité*</u>

<u>*modéliser un système complexe pour construire sa compréhension*</u>

Pour conclure sur la complexité, je vous propose de mettre en regard de toutes ces caractéristiques de la complexité, celles de l'intelligence vues par Douglas Hofstadter (même ouvrage, le « GEB » auquel je me suis référé tout à l'heure). Je le cite ici :

« Les caractéristiques essentielles de l'ntelligence sont certainement les capacités :

- De réagir avec souplesse aux situations qui se présentent
- De tirer profit de circonstances fortuites
- De discerner le sens de messages ambigus ou contradictoires
- De juger de l'importance relative de différents éléments d'une situation
- De trouver des similitudes entre des situations malgré les différences qui peuvent les séparer
- D'établir des distinctions entre des situations malgré les similitudes qui les rapprochent
- De synthétiser de nouveaux concepts à partir d'anciens concepts assemblés différemment
- De trouver des idées nouvelles »

Alors, complexe ou compliqué ? Question de modèle…

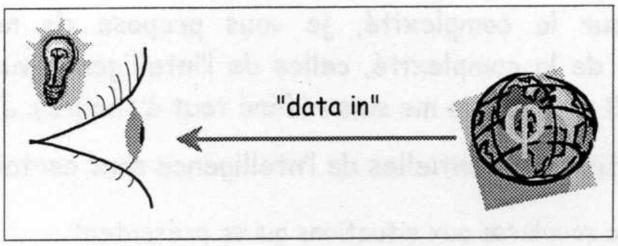
Avec tout ce que je viens de vous dire, cher correspondant, je ne voudrais cependant pas vous donner à mon tour une idée étriquée de cette apparente opposition compliqué / complexe : vous aurez compris que le phénomène, en tant que tel, n'est ni l'un ni l'autre. Ces notions interviennent non dans l'objet intrinsèque, mais plutôt dans notre relation à lui, notre questionnement. Il s'agit aussi d'un choix de notre part, à nous qui le *modélisons*.

Un maître mot que celui de modélisation ! Un choix qui, nous y reviendrons peut-être dans une prochaine missive, conditionne le résultat de notre processus cognitif… Lotfi Zadeh, parlant de modèle, ne soulignait-il pas que *« quand on a qu'un marteau, on voit des clous partout »* ?

Le risque, pour nous cartésiens, est d'utiliser toujours le marteau de l'analyse sans le savoir. Nous avons déjà relevé page 5 ce risque d'utilisation non intentionnelle d'un modèle, toujours le même : nous avons pour la plupart, à cause de notre bagage culturel et peut-être aussi de la façon dont il nous a le plus souvent été inculqué (du maître vers l'élève), une tendance à imaginer le processus de modélisation comme une « acquisition de données » issues d'un phénomène, suivie d'une réflexion menant à un modèle explicatif, de type « analyse de données ».

Mais vous vous fatiguez peut-être de lire un si long courrier et qu'à ce niveau, un petit dessin aura plus de valeur tonifiante qu'un long discours…

[xii] J'ai repris en Annexe 2 un texte le concernant.



Une certaine vision de la modélisation « positive »

Une certaine naïveté, ou un manque de pratique, pourrait nous laisser croire en cette vision « objective » des choses de la science : « je n'y suis pour rien, ce sont là les données du problème, les chiffres sont les chiffres, l'expérience c'est l'expérience. »

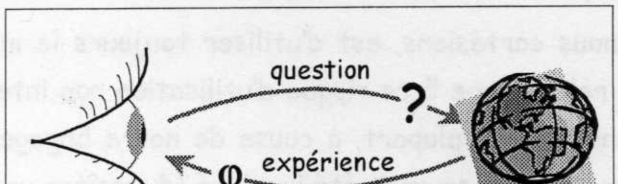
En fait, c'est plutôt là une vision passive... ou pire, une *subjectivité inconsciente* - pour reprendre les mots de Jean-Louis Le Moigne *[La modélisation des systèmes complexes]* - qui se cache derrière une croyance d'objectivité.

Après un peu de réflexion, nous pourrions donc ajouter plus prudemment : « remarquez, j'aurais pu changer de point de vue, on fait dire aux chiffres ce que l'on veut, tout est relatif ... ». *Si non e vero, e bene trovato...* ce qui n'est pas non plus satisfaisant pour le scientifique qui se retrouve à la tête de sciences tellement molles qu'elles n'en sont plus. Car la science vise une réalité, cherche une compréhension et prétend se soumettre à une vérification[xiii].

Alors, n'avons-nous que le choix entre objectivité illusoire, subjectivité inconsciente ou abandon au doute ?

Il apparaîtra tôt ou tard que pour saisir la complexité des objets que nous nous donnons à connaître (objets au sens large, concrets ou conceptuels), l'action de l'observateur ne peut plus être ignorée : il interroge l'objet, c'est-à-dire qu'il choisit sa ou ses questions de façon à faire émerger un sens. Nous dirons qu'il *modélise* le phénomène, l'objet, pour *construire son sens* : ne nous méprenons pas, il s'agit bien là d'un processus rétroactif, bouclé...

Un petit dessin ?



La modélisation « constructive »

---

xiii *1. La science vise une «réalité», quelle que soit l'interprétation que la philosophie veuille donner à ce terme: il s'oppose seulement ici à toute production que l'imagination construirait sans obstacles.*

2. La science cherche une «explication», c'est-à-dire l'insertion de la réalité qu'elle décrit dans un système abstrait de concepts, débordant les faits singuliers que l'expérience nous propose. Une explication ainsi entendue suppose que les faits à expliquer soient transposés d'abord sous la forme d'un «modèle» abstrait, dont les éléments puissent être définis par leurs relations mutuelles et, pour certains d'entre eux, par un protocole de rapports avec l'expérience.

3. La science se soumet à des critères de «validité» qui sont explicitement formulables et qui font l'objet d'un consensus.

[Gille Gaston Granger, article « épistémologie », Enc) ycl. Univ.]

Le modélisateur averti est conscient d'écouter le monde, mais aussi de l'interroger, de partir du concept (son projet, par exemple) pour le confronter au monde : de manière générale, un modèle se construit dans une fonction *médiatrice* entre des niveaux plus concrets et plus abstraits.

Cette autre réponse est celle que Jean-Louis Le Moigne appelle une modélisation *projective* : intentionnelle, la méthode choisie répond à un *projet.* Ni objective, ni subjective, mais projective... Joli terme, non ? Cette vision dynamique est celle de l'épistémologie *constructiviste* de Gaston Bachelard (1884-1962) ou de l'épistémologie *génétique* de Jean Piaget (1896-1980) :

« Et quoi qu'on en dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. C'est précisément ce sens du problème qui donne la marque du véritable esprit scientifique. Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. »

[G. Bachelard, La formation de l'esprit scientifique - 1938 - p. 14]


Jean Piaget

« La connaissance ne saurait être conçue comme prédéterminée, ni dans les structures internes du sujet, puisqu'elles résultent d'une construction effective et continue, ni dans les caractères préexistants de l'objet, puisqu'ils ne sont connus que grâce à la médiation nécessaire de ces structures. »

[J. Piaget, Introduction à l'épistémologie génétique - 1950]


Auguste Comte

Pensées qui se démarquent de celle d'Emmanuel Kant (pour qui existent des concepts a priori, indépendants de toute expérience) et de celle, *positiviste,* d'Auguste Comte (1798-1857).

Dans sa « philosophie positive », démarche de structuration encyclopédique, le but de l'auguste Comte était de réduire à une unité... la totalité des connaissances humaines ! Bref, comme il le dit lui-même, il s'efforça au cours de sa carrière de transformer la science en philosophie, puis la philosophie en religion. Un tantinet mégalomane, il se dit le «compléteur de Descartes» (1842) et, homme providentiel, alla jusqu'à fonder la « religion de l'humanité » en 1847.

Il range les sciences dans l'ordre : du « positif » le plus abouti aux sciences encore inachevées... Soit : les mathématiques, l'astronomie, la physique, la chimie, la biologie et, enfin, la physique sociale (la sociologie qui vient de naître). Ce n'est pas pour rien que la devise positiviste est « Ordre et Progrès » ! [xiv]

Cher correspondant, je ne résiste pas au plaisir d'une citation, plaisir critique il est vrai :

« Il est difficile de retenir un mouvement d'étonnement. Qu'est ce théoricien du progrès qui ferme la porte à l'astrophysique, à la statistique? Ce savant qui méconnaît le mouvement brownien ou la théorie

---

xiv Si cette devise figure aujourd'hui sur le drapeau du Brésil et dans sa Constitution de 1891, c'est grâce Botelho de Magalhães, l'un des chefs de la révolution de 1889... et membre de l'église positiviste.

cinétique des gaz? Ce théoricien du fait et du constat historique, qui donne des leçons (à ne pas suivre et qu'ils ne suivront pas) aux savants? Comte apporte de l'ordre dans le corpus des sciences, mais il lui sacrifie le progrès. Sous certains aspects, sa pensée paraît rétrograde. Le positivisme n'est pas la positivité. » *[Bernard Guillemain, Enclyclopedia Universalis]*

Au contraire, Bachelard montre qu'un système comme celui des mathématiques, loin d'être abouti, immuable, parfait (bref : positif...) est susceptible de transformations profondes *[Essai sur la connaissance approchée, 1928]*. Sa « solidité » tient non à sa permanence mais à la puissance de renouvellement des concepts qu'elle avance, puissance d'autant plus grande qu'elle permet à l'esprit de se libérer du connu (tient, on dirait du Krishnamurti !).

Cela me rappelle ce commentaire de Niels Bohr *: « Monsieur, votre théorie est intéressante, mais elle n'est pas assez folle pour avoir une chance d'être vraie ».*

Bachelard se situe à une époque doublement marquée : par le bouleversement des sciences (théorie des ensembles, physique quantique, relativité) et par l'irruption de la psychanalyse. Il questionne alors le scientifique du point de vue de ses « obstacles épistémologiques », et propose d'opérer une psychanalyse de la connaissance scientifique :

« Notre esprit, dit justement M. Bergson, a une irrésistible tendance à considérer comme plus claire l'idée qui lui sert le plus souvent. (...) Un épistémologue irrévérencieux disait, il y a quelque vingt ans, que les grands hommes sont utiles à la science dans la première moitié de leur vie, nuisibles dans la seconde moitié. L'instinct formatif *est si persistant chez certains hommes de pensée qu'on ne doit pas s'alarmer de cette boutade. Mais enfin, l'instinct* formatif *finit par céder devant l'instinct* conservatif*. Il vient un temps où l'esprit aime mieux ce qui confirme son savoir que ce qui le contredit, où il aime mieux les réponses que les questions. Alors l'instinct conservatif domine, la croissance spirituelle s'arrête.*

(...) En résumé, l'homme animé par l'esprit scientifique désire sans doute savoir, mais c'est aussitôt pour mieux interroger.» *[G. Bachelard, La formation de l'esprit scientifique, p.16-19]*

Là n'est pas mon propos que de reprendre un à un les obstacles épistémologiques relevés par Bachelard : comme moi, vous aurez plaisir à les trouver explicités et illustrés d'un ton alerte dans son ouvrage. Je vous citerai seulement le premier, *l'expérience première* :

« La première expérience ou, pour parler plus exactement, l'observation première est toujours un premier obstacle pour la culture scientifique. En effet, cette observation première se présente avec un luxe d'images ; elle est pittoresque, concrète, naturelle, facile. Il n'y a qu'à la décrire et à s'émerveiller. On croit alors la comprendre. »

« Il s'agit alors, non pas d'acquérir *une culture expérimentale, mais bien de* changer *de culture expérimentale, de renverser les obstacles déjà amoncelés par la vie quotidienne. Un seul exemple : l'équilibre des corps flottants fait l'objet d'une intuition familière qui est un tissus d'erreurs. D'une manière plus ou moins nette, on attribue une activité au corps qui flotte, mieux au corps qui* nage*. Si l'on essaie avec la main d'enfoncer un morceau de bois dans l'eau, il résiste. On n'attribue pas facilement la résistance à l'eau. »*

La suite au prochain courrier…

Mais il est tard, cher correspondant, et je m'aperçois avec embarras que je me suis laissé emporter par mon sujet : dites-moi si vous eûtes le courage de me lire, ou si la longueur de ces pages a eu raison de votre intérêt pour elles…

… ou si l'un et l'autre ?

Je vous salue bien cordialement, en espérant que vous m'accorderez le plaisir de votre réponse,

jean-pierre.richard@ec-lille.fr

Annexe 1. **Georg CANTOR (1845-1918)** *(source : Encyclopedia Universalis)*

Georg Cantor (1845-1918) est né à Saint-Pétersbourg. Il étudie les mathématiques à l'université de Zurich, puis de Berlin où il est élève de Kummer, Kronecker et Weierstrass. En 1867, il soutient une thèse de théorie des nombres, mais s'oriente vite, sous l'influence de Weierstrass, vers l'analyse et plus particulièrement vers l'étude des séries trigonométriques. Précisant des idées de Weierstrass, Cantor donne tout d'abord une définition rigoureuse des nombres réels en les construisant par complétion à partir des nombres rationnels, puis s'attache à décrire et à classer les ensembles exceptionnels. C'est à ce propos qu'il sera amené, dans une série de mémoires échelonnés de 1872 à 1884 à élaborer les bases de la théorie des ensembles; les résultats inattendus qu'il obtenait, parfois à son plus grand étonnement, pour les ensembles de nombres réels l'amenèrent alors à dégager sous forme abstraite les mécanismes qui y conduisaient. À partir de 1882, Cantor rompt complètement avec les mathématiques traditionnelles en attribuant à la théorie des ensembles un rôle unificateur et synthétique: dominer et précéder logiquement le reste des mathématiques; il inaugurait ainsi des modes de raisonnement entièrement nouveaux.

Les conceptions de Cantor se heurtèrent dès leur publication à la défiance et même à l'hostilité déclarée de nombreux mathématiciens; parmi ces derniers, Kronecker s'acharna tout particulièrement contre ses théories – se livrant même à des attaques personnelles extrêmement violentes contre leur auteur. Mais l'amitié de Dedekind, que Cantor avait rencontré en 1872 et avec lequel il échangera une correspondance presque quotidienne pendant de nombreuses années, rompit un peu son isolement; ces lettres constituent un extraordinaire témoignage au jour le jour des découvertes, des préoccupations et des doutes de leur auteur. En 1884, Cantor, épuisé nerveusement par ses tentatives infructueuses pour démontrer le «théorème continu» (dont on sait, maintenant, qu'il est indémontrable dans le cadre de la théorie des ensembles) et par les attaques de ses détracteurs, est atteint d'une première crise nerveuse, point de départ d'une dramatique crise personnelle. Sur sa demande, il change sa chaire de mathématiques à l'université de Halle contre une chaire de philosophie et s'éloigne des mathématiques pendant quelques années.

Cependant l'œuvre de Cantor continuait à mûrir et celui-ci se remettait à publier quelques mémoires; le dernier d'entre eux, *Contributions à la fondation de la théorie des nombres transfinis* (1897), est un exposé systématique et abstrait de l'arithmétique transfinie. Mais déjà la situation avait changé, de nombreux mathématiciens s'étant ralliés aux théories cantoriennes; c'est alors qu'éclate, avec l'apparition de paradoxes (paradoxe de Burali-Forti, 1897; paradoxe de Russell, 1905), une véritable crise qui risque de mettre en péril l'édifice. Lorsque Cantor meurt, le 6 janvier 1918, dans l'asile d'aliénés de Halle, l'importance de son œuvre mathématique est universellement reconnue.

La découverte des deux puissances :

Le point de départ des travaux de Cantor est l'étude des quantités irrationnelles et du continu; il a donné, avec Dedekind qui suit une autre approche, sa forme définitive à la théorie des nombres réels. En vue d'arithmétiser l'analyse, c'est-à-dire de dégager complètement la définition des nombres réels de la notion de limite, Cantor met en évidence le caractère «idéal» de la notion de nombre réel: un nombre irrationnel est défini par la donnée d'une suite fondamentale de nombres rationnels (on dit plutôt, de nos jours, suite de Cauchy); le continu, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels, que Cantor identifie axiomatiquement aux points d'une droite apparaît ainsi comme défini par une multitude de suites superposées de nombres rationnels.

Les premières investigations de Cantor sont relatives à la possibilité de ranger certains ensembles de nombres en une suite simple $u_1, u_2, ..., u_n$ ... Cantor montre que c'est le cas pour toute suite multiple (linéarisation) et pour l'ensemble des nombres rationnels, tandis que Dedekind lui communique le même résultat pour les nombres algébriques, c'est-à-dire les nombres qui sont racines d'équations à coefficients entiers. En est-il de même de l'ensemble des nombres réels? Quelques jours après s'être posé cette question, Cantor y répond par la négative et dégage immédiatement la portée de ce résultat pour l'analyse: il existe une infinité de nombres transcendants et ces derniers ne se laissent pas ranger en une suite simple. On voit apparaître ici une démonstration d'existence qui n'est pas effective, en ce sens qu'elle ne permet pas concrètement de construire les nombres transcendants dont elle affirme l'existence; pour cette raison, un mathématicien «réaliste», comme Kronecker, estime qu'une telle démonstration n'en est pas une. Ranger des nombres en une suite simple signifie établir une correspondance biunivoque (on dit plutôt bijection) avec l'ensemble des nombres entiers; cette approche conduisit naturellement Cantor à utiliser la notion de bijection, pour comparer des ensembles de nombres, et à introduire, dès 1877, la notion d'ensembles de même puissance. En étudiant les puissances des ensembles usuels de l'analyse, Cantor a alors la stupéfaction d'obtenir des résultats qui semblent tout à fait contraires à l'intuition, comme par exemple la possibilité d'établir une bijection entre le continu à une dimension et le continu à n dimensions (« Je le vois, mais je ne le crois pas », écrit-il à Dedekind). Des essais de classification précédents se dégagent ainsi deux types essentiels d'ensembles infinis: les ensembles que l'on peut ordonner en une suite simple, dits dénombrables, et les « continus » (il n'y a ici aucune condition topologique), chacun de ces types possédant de remarquables propriétés de stabilité. Dès 1878, Cantor est persuadé qu'il n'existe que ces deux types d'ensembles infinis de points dans R^n (théorème du continu), et il cherchera toute sa vie à établir ce résultat. C'est en espérant trouver dans la dérivation des ensembles un procédé de passage du continu au dénombrable qu'il sera conduit à une de ses découvertes les plus originales, la théorie des ordinaux transfinis.

La dérivation des ensembles :

Les travaux de Weierstrass avaient mis en évidence l'importance de la notion de point d'accumulation d'un ensemble infini, c'est-à-dire de point contenant dans tout voisinage une infinité de points de l'ensemble; tout point de l'ensemble qui n'est pas un point d'accumulation est appelé par Cantor un point isolé. Par définition, on appelle alors ensemble dérivé d'un ensemble de points E l'ensemble EH des points d'accumulation de E. Les premiers travaux de Cantor sur les ensembles exceptionnels qui interviennent dans la théorie des séries trigonométriques avaient mis en évidence l'importance de la notion d'ensemble dérivé; en liaison avec ses recherches sur le dénombrable et le continu, il dév eloppa une théorie des ensembles de points intimement liés à des considérations fines de topologie de la droite, espérant ainsi appréhender le passage du continu au dénombrable. Nous dégagerons surtout ici les idées qui vont le conduire à l'arithmétique transfinie.

Si E est un ensemble infini, on peut former la suite de ses dérivés successifs: E', E'', ..., $E^{(n)}$, Cantor dit que E est du premier type si un de ces ensembles dérivés est constitué d'un nombre fini de points, et du second dans le cas contraire. Pour approfondir l'étude des ensembles du second type, Cantor, remarquant qu'à partir de E' chaque ensemble contient son dérivé, appelle dérivé d'ordre ∞ l'ensemble $E(\infty)$ des points communs à tous les dérivés successifs de E' ; par dérivations successives de $E(\infty)$, on obtient les ensembles dérivés d'ordres $\infty + 1$, $\infty + 2$, ..., $\infty + n$, ... ce qui, en considérant de nouveau l'ensemble des points communs à tous les ensembles précédents, permet de définir le dérivé d'ordre 2∞; le même processus permet de définir les ensembles dérivés d'ordres 3∞, ..., $n\infty$, ..., ∞^2, ..., ∞^n , ..., ∞^∞ ... Comme il l'écrit, « nous voyons ici une génération dialectique de concepts qui conduit toujours plus loin et qui, libre de toute contrainte, reste nécessaire en soi et conséquente ». Mais la synthèse cherchée entre le continu et le dénombrable est manquée car la génération des symboles ci-dessus reste prisonnière du dénombrable; il apparaît tout d'un coup avec évidence à Cantor qu'«il faut que les symboles infinis soient autre chose que les étapes d'une génération progressive, mais les représentants d'une réalité immanente que des moyens nouveaux permettront d'atteindre, il faut s'engager dans le domaine véritable du transfini» (J. Cavaillès). Cette nécessité de l'étude directe de l'infini actuel est le point de départ de la révolution cantorienne de 1882.

La rupture avec les mathématiques traditionnelles :

De 1882 à 1884, Cantor publie une série de mémoires dans lesquels il pose les bases de la théorie des ensembles abstraits, du calcul des puissances et de la théorie des ordinaux transfinis; dans son esprit, ces concepts ne sont encore que « l'unité supérieure qui permet de considérer du même point de vue, le continu et le discontinu, de les mesurer avec une même mesure ». Deux mémoires (1894 et 1897) reprendront et systématiseront toutes ces notions dans un contexte complètement abstrait. Il n'est pas question d'exposer ici la théorie désormais classique des nombres ordinaux et des nombres cardinaux. Cantor a mis en évidence les deux aspects de la notion usuelle de nombre d'éléments d'un ensemble fini; le nombre est une abstraction qui émane d'un ensemble d'objets et qui se scinde, par passage aux ensembles infinis, en deux concepts distincts: « celui de la puissance [...] indépendante de l'ordre imposé à l'ensemble et celui de nombre ordinal qui est nécessairement lié à l'ordre imposé à l'ensemble ». Il ajoute: « Si je redescends de l'infini au fini, je vois avec la même clarté et la même beauté comment les deux concepts redeviennent un et se fondent dans le concept de nombre entier fini. » Pour Cantor, «la puissance ou nombre cardinal d'un ensemble est le concept universel ou générique que l'on obtient en faisant abstraction pour l'ensemble aussi bien de la constitution de ses éléments que de toutes les relations que ces éléments ont entre eux ou avec d'autres choses, donc en particulier de l'ordre qui règne entre eux, et en ne considérant que ce qui est commun à tous les ensembles qui lui sont équivalents». La notion de nombre ordinal est au contraire liée à l'existence d'un bon ordre; dans la classification des ordinaux en deux espèces, on retrouve les deux modes de génération des symboles infinis de dérivation: adjonction d'un élément et « passage à la limite ». Cantor appelle ordinaux de la classe II, les ordinaux des ensembles bien ordonnés dénombrables (les ordinaux de la classeI étant les ordinaux finis) et montre que les ordinaux de la classe II forment un ensemble bien ordonné, dont la puissance est supérieure à celle du dénombrable; il obtient donc bien ainsi un procédé de dépassement du dénombrable, mais on ne sait pas pour autant si on a ainsi obtenu la puissance du continu.

Le caractère tout à fait révolutionnaire de ses recherches est apparu avec netteté à Cantor et il a éprouvé le besoin de se justifier en arguant de la liberté de création du mathématicien: « Je ne vois vraiment pas ce qui pourrait nous retenir dans cette activité créatrice de nouveaux nombres, aussitôt qu'il apparaît que, pour le progrès de la science, l'introduction d'une nouvelle, parmi ces innombrables classes de nombres, est devenue souhaitable ou même indispensable; [...] sans cette extension je ne peux plus aller de l'avant, avec elle j'atteins toute sorte d'inattendu. »

Annexe 2. **Kurt GÖDEL (1906-1978)** *(source : Encyclopedia Universalis)*

Issue de la pensée de Boole, de Cantor et de Frege au cours de la seconde moitié du XIXe siècle, la logique mathématique connaît ses premiers développements grâce à Hilbert et à Russel et Whitehead (premier quart du XXe siècle). Mais c'est à Kurt Gödel plus qu'à tout autre qu'elle doit de prendre rang, en l'espace d'une décennie (les années trente), parmi les sciences mathématiques modernes. Gödel n'a pas seulement résolu certains des principaux problèmes soulevés par la logique mathématique à ses débuts, jetant ainsi sur l'ensemble des mathématiques une lumière toute nouvelle; il a également fourni à sa discipline un corpus de concepts, de méthodes et de résultats dont elle tire à ce jour une bonne part de sa substance.

Gödel est né à Brno, l'ancienne capitale de la Moravie (alors rattachée, sous le nom de Brünn, à l'Autriche-Hongrie), le 28 avril 1906. Sa famille, de langue allemande, possédait une petite usine de textile. La scolarité de Gödel à Brno fut marquée par l'intérêt qu'il portait aux mathématiques, mais plus encore à la physique et à la philosophie. D'abord inscrit en physique à l'université de Vienne (1924), il suivit les cours de Furtwängler en théorie des nombres, et passa bientôt en mathématiques (1926). À la même époque, il commença à fréquenter le cénacle philosophique constitué autour de Moritz Schlick, qui allait connaître la célébrité sous le nom de cercle de Vienne. Gödel n'était cependant qu'un participant occasionnel, et il ne fit jamais complètement sienne la doctrine du groupe, le positivisme logique, dont il allait au contraire, à la maturité, s'éloigner définitivement.

En 1929, Gödel établit la complétude du calcul des prédicats, résultat qui lui valut le doctorat en 1930. La même année, il obtenait son premier théorème d'incomplétude, qui parut, accompagné du second, en 1931. Ces résultats, d'une portée immense, firent aussitôt de Gödel, âgé de vingt-cinq ans, un mathématicien célèbre. Nommé Privatdozent à Vienne en 1933, il s'illustra au cours des années qui suivirent dans presque toutes les branches de la logique telle qu'elle se définissait à l'époque. Le plus grand résultat de cette période est la non-contradiction relative de l'axiome du choix et de l'hypothèse généralisée du continu (1938).

L'année 1933-1934 et une partie de l'année suivante furent passées à l'Institute for Advanced Study à Princeton. Gödel y retourna en 1938, après s'être marié, redoutant apparemment, s'il rentrait à Vienne, d'être enrôlé dans l'armée allemande malgré sa constitution fragile; il décida de rester à Princeton, où il s'était plu, semble-t-il, dès son premier séjour. Il ne devait pratiquement pas quitter l'Institute, dont il fut membre associé à partir de 1939, membre permanent en 1946, professeur, enfin, de 1953 à sa retraite en 1976.

Au cours des années 1938 à 1944, il poursuivit son activité mathématique, sans toutefois publier de résultat nouveau, bien qu'il en obtînt plusieurs. Vers 1945, les préoccupations philosophiques commencèrent à l'emporter. L'étude de la conception kantienne du temps et de l'espace rapprochée de la théorie de la relativité, dont il était question au cours de fréquentes conversations avec Einstein, son collègue à l'Institute, conduisirent Gödel à d'importants travaux en physique (1947-1950), comprenant une nouvelle solution aux équations de la gravité, qui fondait une conception cyclique du temps. De 1951 à 1958 environ, Kurt Gödel se consacra essentiellement à la philosophie des mathématiques, approfondissant sa réflexion sur la portée épistémologique des grands résultats de la logique.

À partir de 1958, il porta son attention sur la philosophie «fondamentale», dont la spécificité, par rapport à la démarche scientifique, lui était devenue évidente. C'est à une réflexion sur Husserl et à l'élaboration de son propre système de pensée que Gödel consacra désormais la plus grande partie de son énergie.

S'il est incontestable que la seconde partie de sa vie (à partir de 1939 environ) fut pour Gödel moins fertile en découvertes spectaculaires et en publications, on ne saurait l'attribuer à quelque affaiblissement intellectuel, ni à quelque malheur caché. Au contraire, l'image qu'il offrait à Princeton était celle du savant tranquille, plongé dans son travail, à l'abri des grandes détresses intellectuelles et morales. Il est vrai qu'il souffrait d'une santé fragile, qui le préoccupait souvent et le ralentissait parfois sensiblement dans son effort. Mais jusqu'au bout il restera le maître incontesté de sa discipline, prodiguant avec une absolue générosité les conseils et les encouragements que les logiciens, débutants ou confirmés, venaient solliciter des quatre coins du monde. Ceux qui l'ont connu sont restés frappés par son charme, son esprit, le caractère universel de son intelligence. Scrupuleux à l'extrême dans l'expression écrite de sa pensée, il manifestait dans la conversation la plus grande liberté, se livrant à l'occasion, sur maint sujet, à des spéculations fort peu orthodoxes, auxquelles il accordait, avec toute la finesse d'un grand esprit, juste ce qu'il fallait de sérieux.

Cette versatilité n'était que la manifestation d'une profonde vocation à l'universel. Premier logicien de son temps, Gödel, plus soucieux de questions vraies que de résultats brillants, plus attentif aux exigences de son propre esprit qu'à celles de la recherche scientifique stricto sensu, s'est toujours refusé à n'être qu'un spécialiste.

À sa mort, qui survint le 14 janvier 1978, il laissait impubliée une masse de notes et de résultats mathématiques. De sa longue réflexion philosophique, il n'a livré que quelques fragments, recueillis et partiellement publiés par le mathématicien et philosophe Hao Wang, confident intellectuel des dernières années. L'Institut conserve les traces de cet immense travail, dont se dégagera peut-être un jour la pleine dimension d'un esprit exceptionnel. Gödel laisse une des grandes œuvres mathématiques du siècle, mais aussi l'image sublime de l'homme silencieux, tout à sa quête inachevée.

Annexe 3. **Jean-Louis Le Moigne : 8 axiomes pour une science des systèmes**

(source : Encyclopedia Universalis)

Sur un socle épistémologique constructiviste, on peut proposer en revanche quelques axiomes stables et communicables à partir desquels les énoncés de la science des systèmes pourront être peu à peu inférés, suscitant, par une récursion nécessaire, tels ajustements postérieurs, voire tel renouvellement de l'axiomatique initiale.

Axiome 1. La modélisation systémique est la conjonction de l'intention d'un modélisateur au moins et de l'environnement au sein duquel il est délibérément actif. On peut entendre cet axiome comme l'axiome cybernétique de la conjonction finalité-environnement, par contraste avec l'axiome de disjonction analytique des effets et des causes.

Axiome 2. «Au commencement était l'action» (Goethe), ou encore: «Nous ne représentons que des opérations, c'est-à-dire des actes» (Paul Valéry). Représenter, par conjonction, l'acte et non pas la chose, le processus et non pas le résultat; cet axiome fera de la boîte noire (ou du processeur symbolique), connu par ses fonctions présumées intentionnelles, l'instrument nécessaire de toute modélisation systémique: la « complexité essentielle » (Gaston Bachelard) devient alors a priori appréhendable sans être analysable; elle est complexe d'actions, de fonctionnements intentionnels enchevêtrés.

Axiome 3. Un complexe d'actions perçu complexe par un modélisateur peut être représenté intelligiblement par divers réseaux (alternatifs) d'interactions susceptibles d'une articulation en niveaux d'interactions de densités comparables.

Axiome 4. L'action perçue s'exerce dans un temps perçu irréversible (Ilya Prigogine). Tout modèle systémique d'un complexe porte donc en lui l'hypothèse de ses propres transformations: pas de cinématique sans dynamique associée, et réciproquement (René Thom).

Axiome 5. L'action doit pouvoir être productrice d'elle-même. Cet axiome de récursivité est très fort, et souvent tenu comme contre-intuitif par les logiciens classiques: ne récusent-ils pas l'axiome aristotélicien du tiers exclu (*tertium non datur*)? Faut-il pour autant s'interdire de considérer qu'une organisation est à la fois (conjonction) action d'organiser et résultat de cette action?

Axiome 6. Une action et un complexe d'actions doivent pouvoir produire leur propre représentation: l'action produit l'information qui la représente.

Axiome 7. L'information engendrée par un complexe d'actions doit pouvoir être engrammable (ou mémorisable) sous forme symbolique – et ces systèmes symboliques doivent pouvoir être manipulables (ou computables) au sein du complexe d'actions qui les forme.

Axiome 8. «Nous ne raisonnons que sur des modèles» (Paul Valéry) et «Nous ne communiquons que par des modèles» (Gregory Bateson). De ce fait, «en tant que concepteurs, ou que concepteurs de processus de conception, nous avons à être explicites, comme jamais nous n'avions eu à l'être auparavant, sur tout ce qui est en jeu dans la création d'une conception», donc dans la modélisation systémique (Herbert A. Simon).

Question de modèle...

... de quoi est-ce fait ?

... qu'est-ce que ça fait ?

... pour quoi est-ce fait ?

... comment est-ce fait ?

... à quoi cela vous fait-il penser ?

... en avez-vous des exemples ?

... combien ça coûte ?

... qu'est-ce que ça n'est pas ?

... pour qui est-ce fait ?

... par qui est-ce fait ?

... est-ce nécessaire ?

... est-ce légitime ?

... depuis quand, et pour combien de temps ?

... où en trouve-t-on ?

THEORIE DES SYSTEMES COMPLEXES
plan général

PREMIERE PARTIE: ***MODELISATION DE LA COMPLEXITE***

(JEAN-PIERRE RICHARD)

deuxième partie *(spécifique à l'option Aménagement)*

4H cours + 8H séminaire

Wilfrid Perruquetti

Systèmes dynamiques non linéaires

- un système dynamique, pour quoi faire ?
- classification succincte (exemples et caractéristiques)
- équations différentielles ordinaires (ODEs)
- équations récurrentes (temps discret)
- systèmes à paramètres distribués (DPS)
- systèmes à retards, systèmes intégro-différentiels, …

Les systèmes chaotiques

- historique, définition, conséquences
- exemple de comportement chaotique pour un modèle démographique
- exemple de prévision en météorologie

Les phénomènes de bifurcation

- historique, définition, conséquences
- exemple de bifurcation en démographie

Simulation (séminaire)

- logiciel *maple* (calcul formel et numérique) : présentation, simulations sous *maple*
- exemple d'étude de systèmes dynamiques à l'aide de la simulation

Etude de cas (séminaire)

- exemple abordé : modèle proies - prédateurs ou un modèle de macro-économie

Support : *polycopiés + réf. bibliographiques*

... et quelques chiffres sur le coût de la non-qualité:

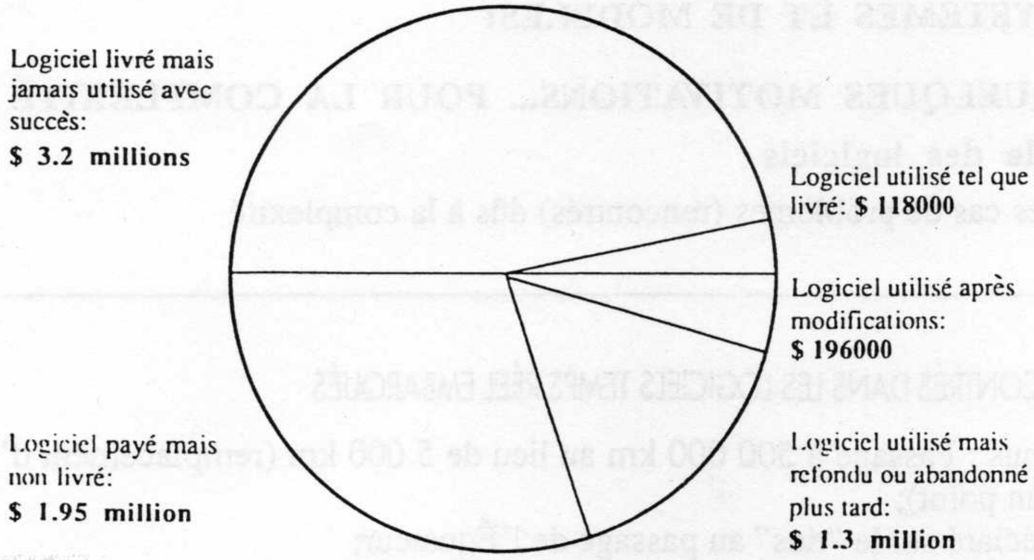


Fig. I.2 Coût de la non-qualité – Neuf grands projets «gestion» de l'administration américaine ($ 6.8 millions)

CAUSES	PROJET								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Le donneur d'ordre à surestimé son propre savoir faire.	X	X				X			
Mauvaises organisation du donneur d'ordre (tel que contrat inapproprié).			X	X		X		X	
Mauvaises spécifications.	X	X		X		X	X	X	X
Trop de confiance du donneur d'ordre.								X	X
Manque d'organisation pendant le projet. Modifications excessives	X	X				X	X		X
Manque d'inspections et de tests adéquats	X	X	X			X		X	

Fig. I.3 Coût de la qualité – Les causes d'échecs de ces neuf projets

MODELISATION DE LA COMPLEXITE

I SYSTEMES ET DE MODELES:

I-1 QUELQUES MOTIVATIONS... POUR LA COMPLEXITÉ

exemple des logiciels

quelques cas de problèmes (rencontrés) dûs à la complexité

PROBLÈMES RENCONTRÉS DANS LES LOGICIELS TEMPS RÉEL EMBARQUÉS

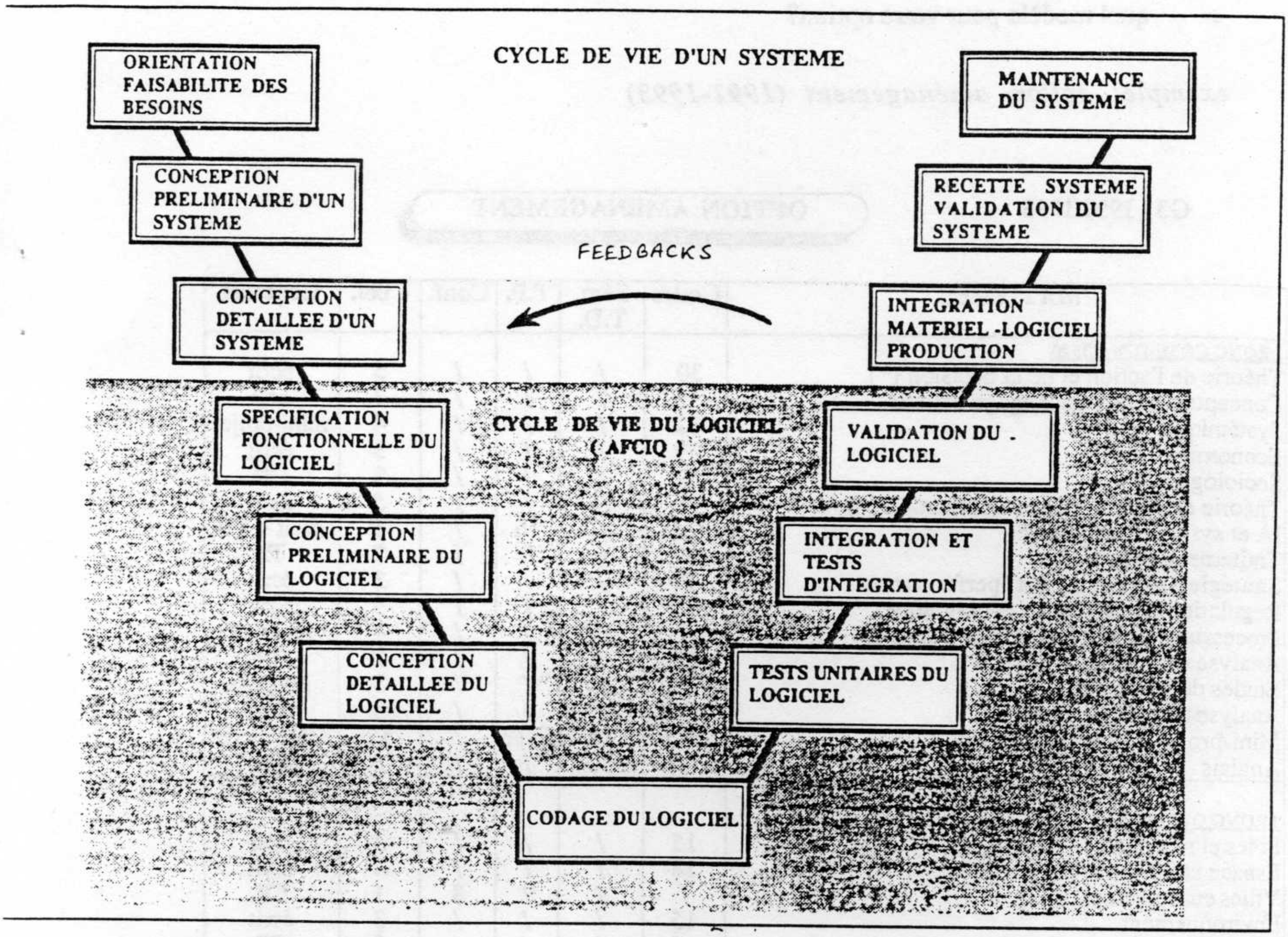
- Mission Vénus : Passage à 500 000 km au lieu de 5 000 km (remplacement d'une virgule par un point);
- avion F16 déclaré sur le "dos" au passage de l'Équateur;
- faux départ de la première navette spatiale (manque de synchro entre deux calculateurs);
- non-reconnaissance par la marine anglaise de l'Exocet dans la guerre des Malouines (Exocet non répertorié comme missile ennemi);
- fusée russe pointant Hambourg au lieu du Pôle Nord (erreur de signe, d'où erreur de 180° du système de navigation);
- 72 ballons détruits par un satellite météorologique.

PROBLÈMES RENCONTRÉS DANS LES LOGICIELS TEMPS RÉEL AU SOL

- Fusée à l'eau (données communiquées avec une mauvaise unité);
- métro "Fantôme" à San Francisco (erreur non détectée à ce jour);
- décès de malades dans un hôpital (erreurs de programme monitoring);
- déclenchement du système de détection américain des missiles stratégiques (la Lune montant de l'horizon considérée comme un OVNI);
- inondation en 1983 de la vallée du Colorado River (mauvaise modélisation du temps d'ouverture du barrage).

Fig. I.4

d'où le concept de "génie logiciel": vers une conception "systématique"



exemple de l'ingénieur

vous souhaitez faire comprendre la spécificité de votre formation à un employeur potentiel...

-> quel modèle pour votre option?

exemple: option aménagement (1992-1993)

G3 - 1992/1993

OPTION AMENAGEMENT

MATIERES	Cours	Sém. T.D.	T.P.	Conf.	Coef.	Contrôle
TRONC COMMUN (335 h)						
Théorie de l'action et de la décision (*)	30	/	/	/	5	écrit
Conceptualisation en langage naturel	16	/	/	/	3	oral
Systémique	12	/	/	/	4	mini-projet
Economie	12	/	/	/	3	écrit
Sociologie	12	/	/	/	3	CR
Théorie et traitement de l'information (*)	16	16	/	/	5	écrit
IA et systèmes experts (*)	24	/	16	/	5	écrit + TP
Traitement de symbole	4	6	8	/	2	TP
Stratégie d'organisation et performances	15	/	/	/	3	écrit
Régulation temporelle et économique	15	/	/	/	3	écrit
Processus d'étude et recueil de données	4	16	/	/	4	Rapport
Analyse stratégique	10	/	/	/	2	CR
Etudes de faisabilité	24	/	/	/	5	Rapport
Analyse technique	20	/	/	/	3	écrit
Mini-projet d'organisation et de gestion	/	16	6x12	/	12	Mini-projet
Anglais	/	30	/	/	5	oral
TRONC OPTIONNEL (135h à choisir)						
Pôles et réseaux	15	/	/	/	3	oral
Espace et industrie (*)	18	/	/	/	4	écrit
Villes européennes	/	/	/	8	1	CR
Environnement	15	/	/	/	3	écrit
Sciences politiques	15	/	/	/	3	CR
Cartographie automatique	6	/	8	/	2	TP
Finances publiques	15	/	/	/	3	écrit
Foncier et bureaux	/	/	/	8	1	CR
Formes urbaines	/	/	/	8	1	CR
Communication graphique	12	/	12	/	5	Mini-projet
Sc. de la conception et architecturologie (*)	30	/	/	/	5	écrit
Conception de produit	/	30	/	/	5	Mini-projet
Programmation et espaces de travail	16	/	/	/	3	CR
Développement	15	/	/	/	3	CR
Conférences	/	/	/	20	2	CR
INITIATION A LA RECHERCHE						
(**) DEA (Sciences de Gestion)	(150)	/	/	/	) 30	mémoire(**)
(**) Mémoire de recherche	/	(2x50)	/	/	)	mémoire(**)
Stage					30	mémoire
2ème Langue facultative					4	note Prof
Stage G2					6	rapport
(*) Enseignement associés au DEA (**) L'un ou l'autre au choix						

-> modèle descriptif des contenus (savoirs)
modèle de type tableau

-> peu intelligible.

Option Aménagement

1994-1995

Matières	Cours	Sém.	TP	Coef.	Contrôle
Enseignement Général					
Pilotage de Processus					
Post-évaluation des projets de TC	/	32		2	CR
Gestion Informatique de projet	/	8	8	1	TP
Conception de Systèmes d'Information	16	/	/	1	CR
Outils informatiques					
IA & Systèmes Experts	16	8	16	2,5	écrit + TP
Théorie & Traitement de l'Information	16	8	/	1,5	écrit
Théorie des Systèmes Complexes	16	8	/	1,5	oral
R.O. & Théorie des Graphes	16	8	/	1,5	écrit
Intelligence Stratégique					
Compl. de Théorie des Organisations	16	/	/	1	CR
Théorie de l'Action et de la Décision	32	/	/	2	oral
Conceptualisation en Langue Naturelle	16	/	/	1	oral
Macro-Economie	16	/	/	1	écrit
Langues Vivantes					
Anglais	32	/	/	2	oral
Ville, Entreprise, Territoire					
Espace et Industrie	32	/	/	2	écrit
Villes européennes	32	/	/	2	CR
Pôles et réseaux	16	/	/	1	oral
Sciences Sociales et Politiques	16	/	/	1	CR
Finances Publiques	16	/	/	1	écrit
Environnement	16	/	/	1	écrit
Cartographie automatique	/	8	/	1	TP
Urbanisation et développement	32	/	/	1	CR
Ingénierie des Organisations					
Modélisation de la complexité	16	/	/	1	écrit
Sciences de la conception	16	/	/	1	CR
Process de Conception de Produit	32	/	/	2	Mini-projet
Communication graphique	16	8	/	2,5	Mini-projet
Ingénierie de contrôle et de suivi	/	32	/	2	CR
Modélisation de Syst. Organisationnels	16	8	/	1,5	écrit
Financement de Projet et Eval. des Coûts	16	/	/	1	CR
Systèmes d'aide à la décision	16	/	/	1	CR
Initiation à la Recherche					
Mémoire de recherche (Labo ou DEA)	/	*(150h)*	/	15	Rap. + Sout.
Projet & Stage de 3ème année	/	/	/	15	Rap. + Sout.
Stage de 2ème année	/	/	/	10	Rapport
Langue Facultative	/	*(32 h)*	/	p.m.	/

-> modèle descriptif des contenus (savoirs), *structurés* (par objectifs ou par thèmes)
modèle de type tableau

-> c'est mieux (en termes de compréhension).

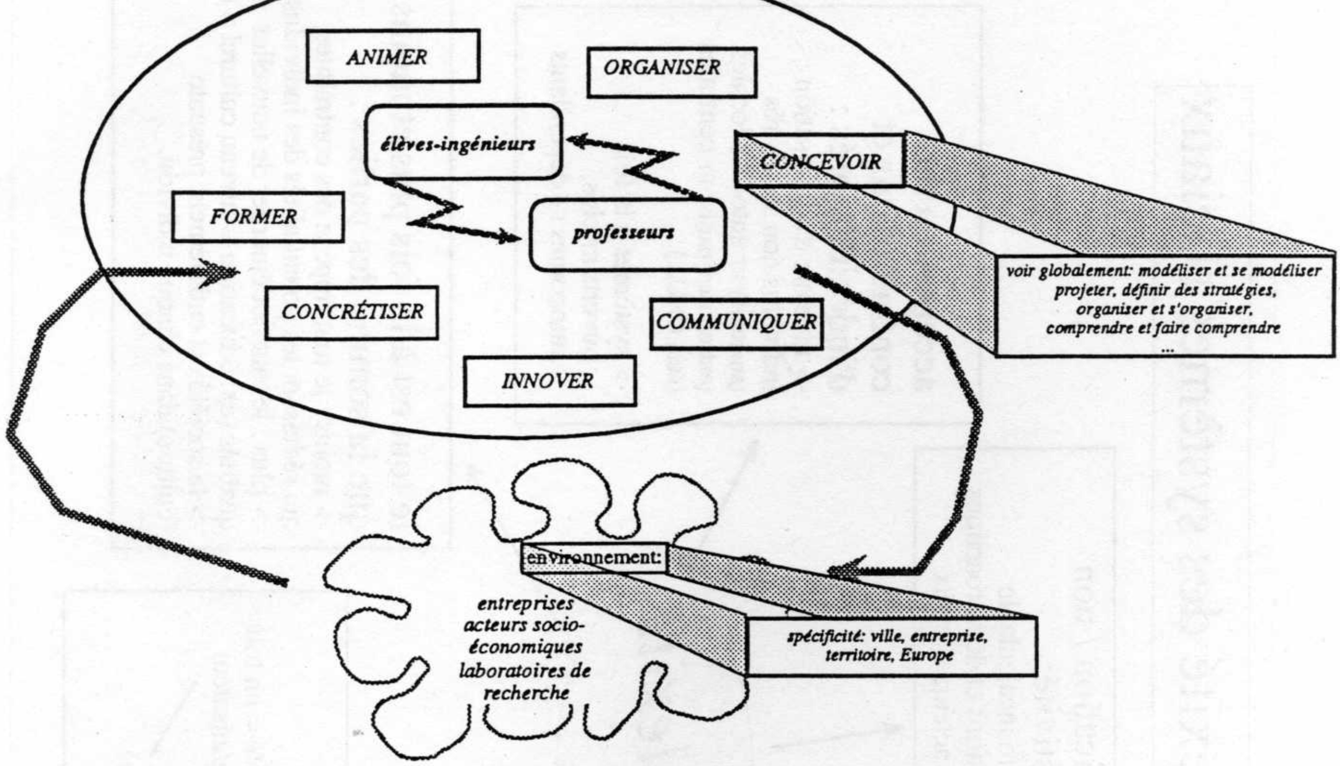
Option
Aménagement

1999/2000

Matières	Cours	TD	TP	TuT	Coef.	Contrôle
Théorie de l'action et de la décision	16	/	/	/	1	Ecrit
Espace et industrie	16	/	/	/	1	Ecrit
Espace, société et développement	16	/	/	/	1	CR
Ingénierie des systèmes et des organisations	16	/	/	/	1	Ecrit
Economie des services	16	/	/	/	1	Ecrit
Finances publiques	16	/	/	/	1	Ecrit
Conception de produit	16	/	/	/	1	CR
Intelligence stratégique	16	/	/	/	1	Oral
Cognition, organisation, conception	16	/	/	/	1	Ecrit
Conception de systèmes d'information	16	/	/	/	1	CR
Recherche opérationnelle	16	/	/	/	1	Ecrit
Intelligence artificielle	12	8	4	/	1	Ecrit + TP
Théorie et traitement d'information	16	8	/	/	1	Ecrit
Modélisation de systèmes complexes	16	8	/	/	1	Oral
Anglais	/	36	/	/	1	Oral
Cas concepteur-développeur	/	/	/	60	) 5	Rap + Sout
Savoirs liés au cas concepteur -développeur	/	36	/	/	)	
Séminaire de post-évaluation & initiation recherche	/	16	/	/	)	
Conférences et visites	/	/	9	/	)	
Cas gestionnaire-développeur	/	/	/	60	) 5	Rap + Sout
Savoirs liés au cas gestionnaire-développeur	/	36	/	/	)	
Séminaire de post-évaluation & initiation recherche	/	16	/	/	)	
Conférences et visites	/	/	9	/	)	
Cas maître d'ouvrage-développeur	/	/	/	60	) 5	Rap + Sout
Savoirs liés au cas maître d'ouvrage-développeur	/	36	/	/	)	
Séminaire de post-évaluation & initiation recherche	/	16	/	/	)	
Conférences et visites	/	/	9	/	)	
Stage & TFE	/	/	/	/	30	Rap+Sout
Tutorat professionalisant	/	/	/	216		
Seconde langue (facultatif)	/	/	/	/	pm	pm
Stage de fin de 2ème année	/	/	/	/	pm	Rapport

exemple (suite):

finalité: *__former des ingénieurs-concepteurs__*



-> modèle par capacités, finalités, spécificités...
et graphique!

-> c'est mieux en termes de compréhension,
ça n'est pas forcément mieux en termes de planification!

=> <u>un modèle, pour quoi faire?</u>

aucun modèle n'est meilleur dans l'absolu, ce qui compte c'est de pouvoir expliciter notre

projet de modélisation

pour pouvoir évaluer la pertinence du modèle...

quelques sources de la complexité des systèmes sociaux

complexité

hasard et désordre sont inévitables :
-> innovation
-> pionniers
contradiction de la loi des grands nombres :
une infime fluctuation peut engendrer une bifurcation.

non neutralité de l'observateur dans l'observation
-> sociologue ∈ société

complication / non exhaustivité:
-> nombre incalculable d'interactions et de rétroactions entre les acteurs sociaux

acceptation de contradictions et d'indécidabilités :
-> niveaux d'organisation : individus non structurés (anarchie) ET autorités locales (entreprises, partis) ET centrales (état, ONU...)
-> systèmes à la fois ouverts ET clos, autonomes ET dépendants

opposition de modèles universalité/localité :
-> modèles traditionnels "universels"/phénomènes sociaux singuliers et locaux
-> macro(socio)/micro(psycho)

relation de complémentarité ordre/désordre/organisation :
-> ordre par fluctuation (Prigogine : des structures tourbillonnaires cohérentes peuvent naître de perturbations qui auraient dû se résoudre en turbulences)
-> modèles chaotiques

auto-/organisation :
individus en interaction ⟶ société = un tout organisateur
rétroaction sur les individus (politique)

le tout est à la fois plus et moins que la somme des parties :
-> moins : le tout impose des contraintes qui réduisent les potentialités des individus.
-> plus : le tout fait émerger de nouvelles qualités (ex: éducation => niveau culturel >)
-> la société est entièrement présente (culture) dans chaque individu.

I-2 NOTIONS DE SYSTEME ET DE MODELE

comment aborder le problème de la définition?

deux exemples:

-> ***<u>qu'est-ce-qu'un système?</u>***

"ensemble d'éléments en inter-relation"	trop vague
"<u>ensemble d'éléments en interaction</u>, doté d'une <u>structure</u>, qui réalise des <u>fonctions</u>, qui <u>évolue</u> dans le temps, dans un <u>environnement</u>, selon une <u>finalité</u>"	. . .
"toute forme agencée (pattern) d'activités dans un réseau tenu pour consistant par quelque observateur"	plus général

par exemple (cf. Le Gallou):

Définition – description d'un <u>SYSTEME</u>

<u>Définition littérale</u>

	(commentaires ou quasi-synonymes <u>explicitant les mots-clés retenus</u>)
Un <u>système</u> ($\#_0$) est	($\#_0$) Outil conceptuel, création de l'esprit....
un <u>ensemble</u> ($\#_1$)	($\#_1$) Un ensemble formant une identité ou une unité cohérente et autonome....
d'<u>objets</u> ($\#_2$),	($\#_2$) Objets ou éléments réels ou conceptuels (individus, actions......)
<u>organisé</u>($\#_3$)	($\#_3$) Muni d'un ensemble de relations, d'interrelations mutuelles, d'interactions dynamiques.... (organisation ou structure ...)
en fonction d'un <u>but</u>,($\#_4$)	($\#_4$) ou d'un ensemble de buts, objectifs, projets, finalités ou fonctions de base ...
et immergé dans un <u>environnement</u>($\#_5$)	($\#_5$) environnement, univers, ou sur-système, méta-système........

<u>Définition symbolique</u> plus opérationnelle) :

(Ensemble d'ensembles)

Système "S": $\boxed{\overline{\{S\}} = \{E \; R \; ; O \; , Re\}}$

{E} : Ensemble des <u>éléments</u> constituants.

{R} : Ensemble des <u>relations</u> internes (ou structure).

{O} : Ensemble d'<u>objectifs</u> (et de finalités).

{Re} : Ensemble de <u>relations</u> extérieures(avec l'<u>environnement</u>).

<u>3) Conditions du SYSTEME</u>

Pour que cet ensemble soit un système il doit répondre, en particulier, : conditions et caractéristiques suivantes, et aux règles qui en découlent ((limitatives).

. **TOTALITE** (cohérence) : éléments ou sous-systèmes reliés. {F

. **AUTONOMIE** (environnement) : ouvert, quasi isolé {F

. **TELEONOMIE** (finalités) : achronie (objectifs, fonctions) globales {C

. **ACTIVITE** (ou fonctionnement) : synchronie (fonctions et organes {E+

. **PERMANENCE** (ou EVOLUTION) : diachronie (naissance, VIE et mort) {tem

• ...

<u>4) REGLES ou autres caractéristiques</u> :

1) **Un système est toujours inclus dans un « sur- système»** (environnement)

2) **Un élément d'un système n'est pas forcément un «sous-système»** (cet objet inclus peu ne pas avoir les conditions précédentes)

3) **Un système, non limité par des objectifs ou finalités est indéfinissable** (il est indescriptible, avec un nombre de caractéristiques infini)

4) **Un système a toujours une activité et une évolution** (même si elles prennent temporairement une valeur nulle ; comme « ensemble vide reste toujours un ensemble »).

• ...

-> *qu'est-ce-qu'un modèle?*

1ère approche: par référence aux connaissances précédentes (analogie)

quels sont les modèles connus?

1 modèles de connaissance (lois de la physique, chimie, économie, biologie, sociologie...)
2 modèles graphiques (exemples: abaques)
3 modèles de règles (description des phénomènes par des règles de conduite issues de l'interview d'un "expert", implications logiques: "si on continue, ça va mal se terminer")
4 modèles fichiers: informations sous forme de tableaux de données (exemple: tables de vérité)
5 modèles fonctionnels (exemple: cahier des charges fonctionnel en analyse de la valeur)
6 modèles cybernétiques: repérer les variables pertinentes, faire apparaître les causes (=entrées) et les effets (=sorties), leurs liens causaux, leur rétroactions, (exemple: graphes, modèles entrée-sortie → →, rétroactions...)
7 modèles structurels: faire émerger une structure des relations (hiérarchisée, bouclée, causale...)
8 etc...

mais tout est modèle! -> exhaustivité?

2ème approche: analytique, "objective"

un modèle, de quoi c'est fait?

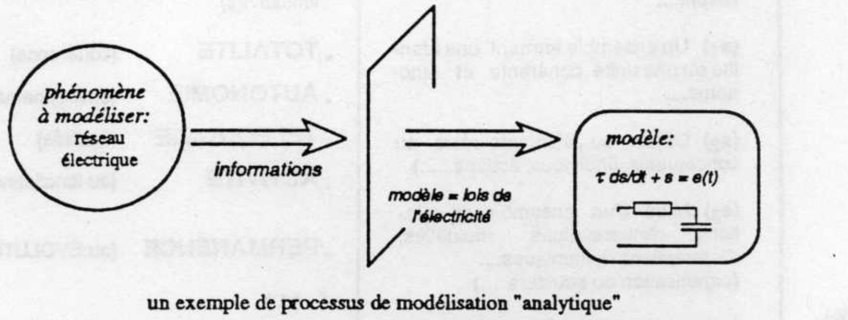
encore plus inadaptée, dans le cas présent, que la 1ère approche: inadapté dans tous les cas complexes... l'"objectivité" annoncée cache en fait une grande subjec

3ème approche: opérative, fonctionnelle, structurelle

comment obtenir un modèle?

étude de la relation modélisateur / phénomène modélisé: comment fonctionne le processus de modélisation? quelle sont ses structures?

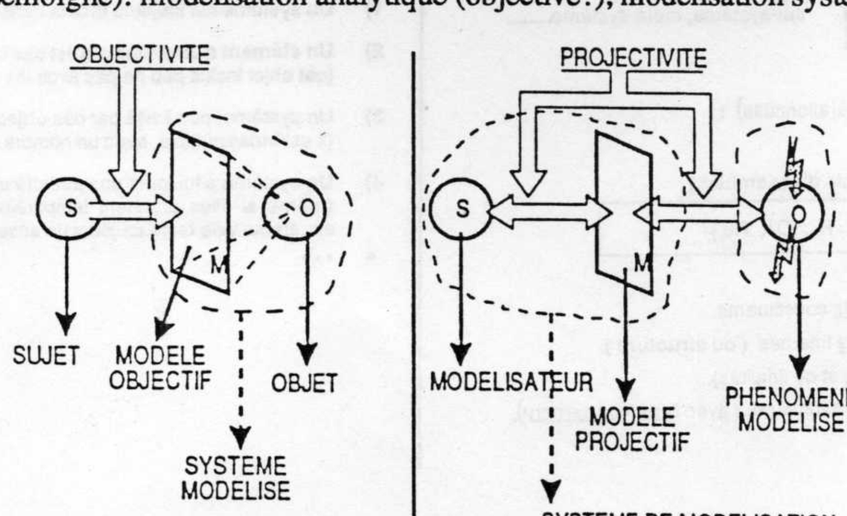
exemple:



un exemple de processus de modélisation "analytique"

ça devient intéressant (ici, la structure est caténaire: phénomène -> informations -> modèle. Mais où est passé le modélisateur?)

autre exemple (Lemoigne): modélisation analytique (objective?), modélisation systémique (**proje**c**tive**)



"objectivité"? -> souvent, c'est de la subjectivité involontaire
"projectivité" = capacité du modélisateur à expliciter ses *projets de modélisation*

4ème approche: approche-projet (téléologique)

un modèle, pour quoi faire?

par exemple: un modèle pour

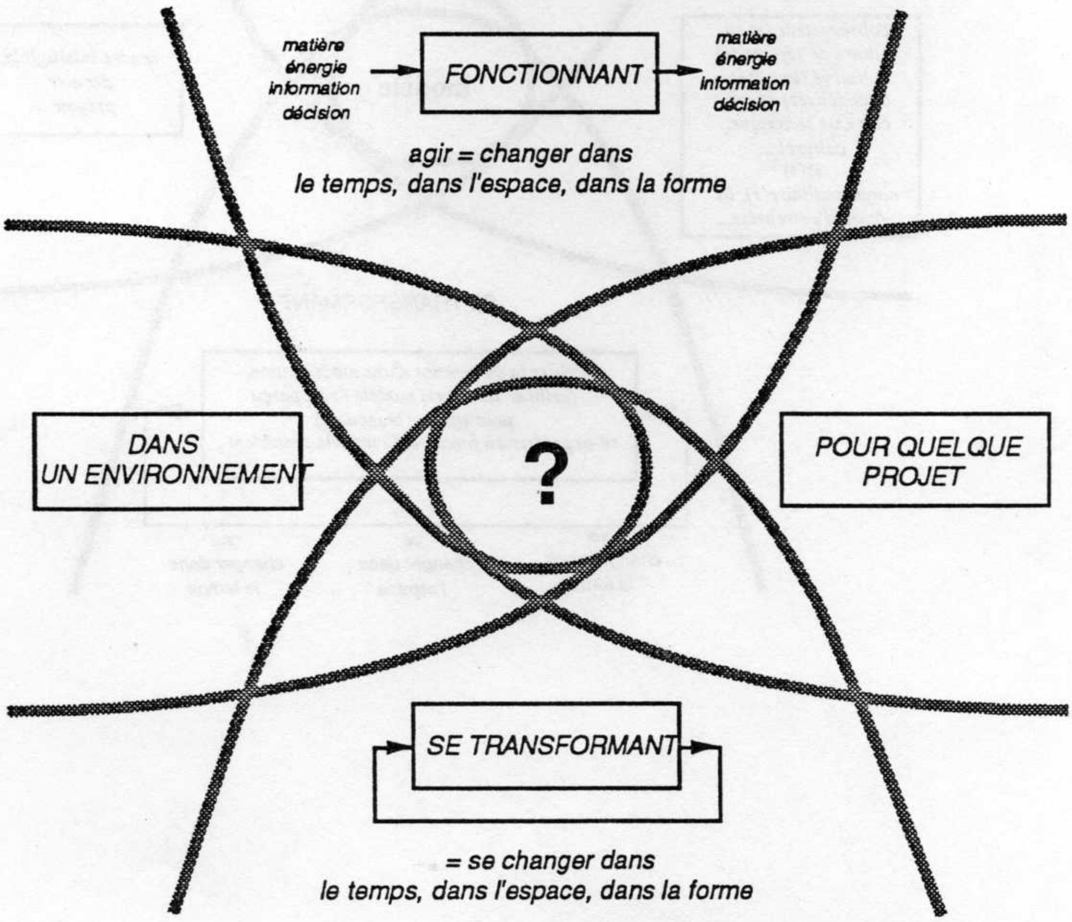
spécifier	un cahier des charges	en établissant des objectifs immuables
comprendre	un existant	en identifiant les finalités du système, en choisissant des variables pertinentes "descriptives" de ces finalités, en comprenant leurs inter-relations...
prévoir ou décider	une évolution dans le temps	en étudiant la pérénité des objectifs et des moyens, en identifiant les informations nécessaires à la décision, en estimant l'incertitude, en simulant (le possible, l'imaginable)...
concevoir	un système complexe	en organisant un plan d'action, selon une démarche de projet

5ème approche: l'approche systémique:

un modèle: pour quel projet, par quelles fonctions et organisation, dans quel environnement, pour combien de temps?

L'approche systémique se veut la plus ouverte possible, passant dans un premier temps par une réflexion globale.
Elle conjoint principalement deux approches: structuraliste et cybernétique, ce qui correspond dans le principe à la figure suivante:

un phénomène modélisable est perçu en tant qu' action dans un environnement, pour quelques projets, faisant (fonctionnant), et se faisant (se transformant)



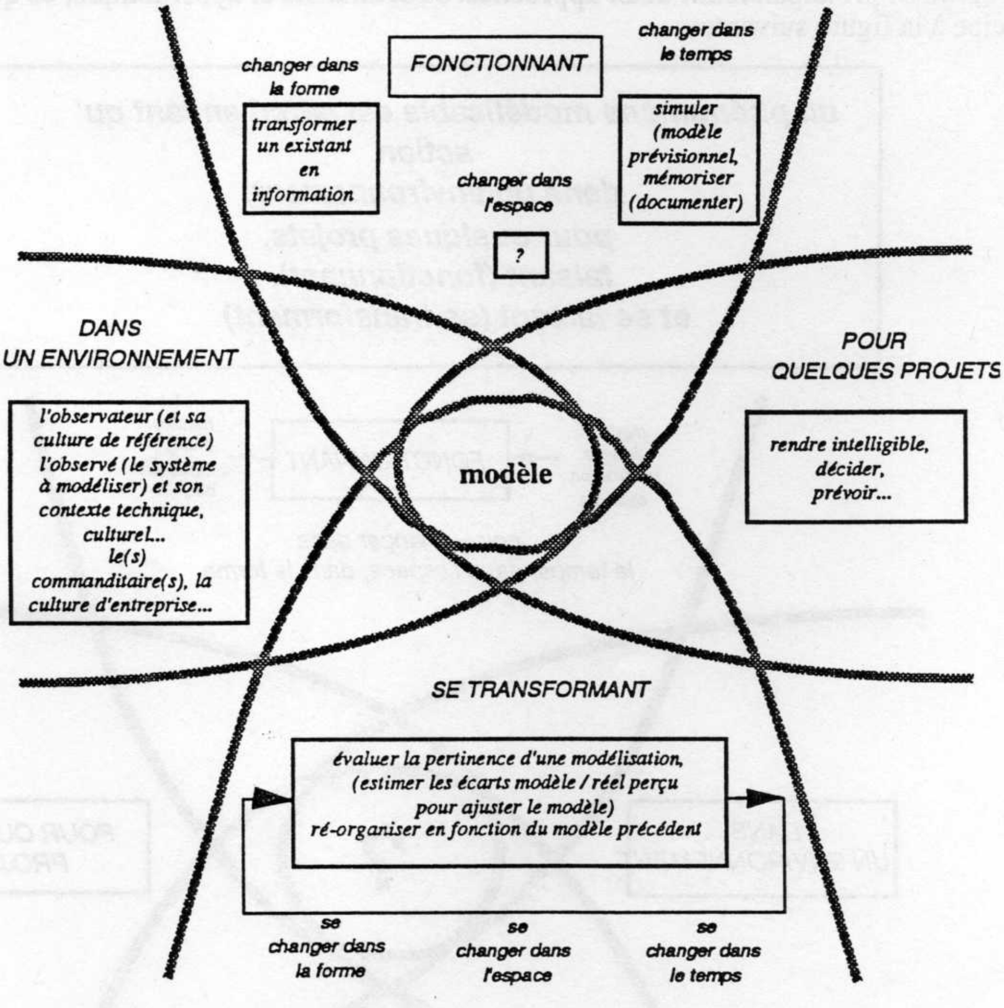
Dans le cas présent, on pourra définir un modèle comme:

le modèle est perçu en tant qu'action
dans un environnement :
l'observateur (et sa culture de référence)
l'observé (le système à modéliser) et son contexte technique, culturel...
le(s) commanditaire(s), la culture d'entreprise...

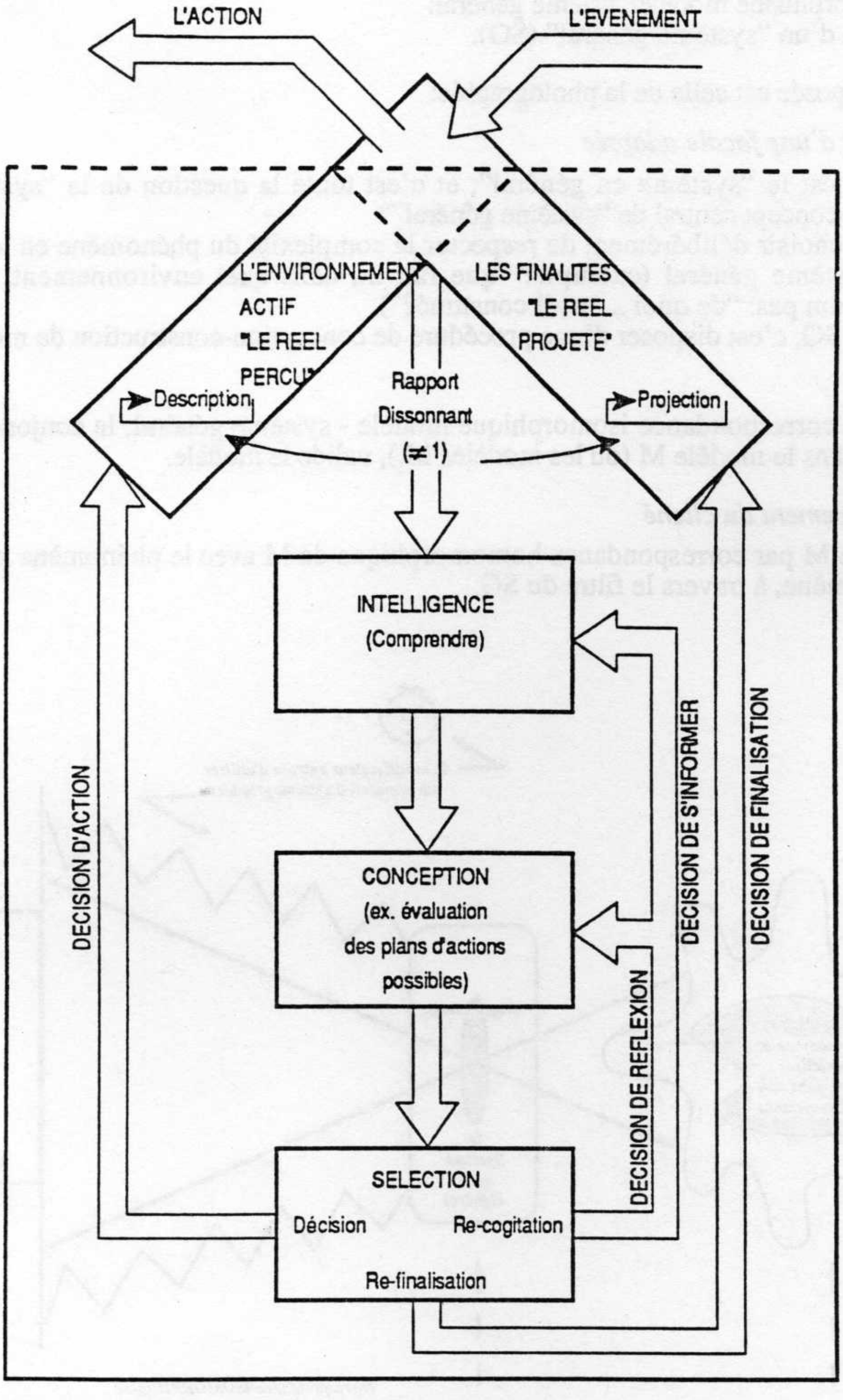
pour quelques projets:
rendre intelligible, décider, prévoir...

faisant:
transformer un existant en information
identifier des objectifs,
proposer des variables "descriptives" pertinentes,
décrire leurs interactions,l'organisation,
simuler, documenter, informer...

et se faisant (se transformant) :
évaluer la pertinence d'une modélisation,
(estimer les écarts modèle / réel perçu pour ajuster le modèle)
ré-organiser en fonction du modèle précédent



-> un modèle, pour quoi faire?
exemple du processus de décision-résolution organisationnelle selon H.A. Simon



=> un (des) modèles pour
décrire,
projeter, finaliser
comprendre, informer,
concevoir, organiser,
évaluer, sélectionner, décider,
... agir!

I-2 LA "SYSTEMOGRAPHIE"

Néologisme proposé par Lemoigne pour décrire le processus de modélisation, mettant en évidence la volonté de générer des modèles assurant:

- l'homomorphisme phénomène/modèle:
- l'isomorphisme modèle/système général:

grace au choix d'un "système général" (SG).

L'analogie proposée est celle de la photographie:

1) disposer d'une focale adaptée

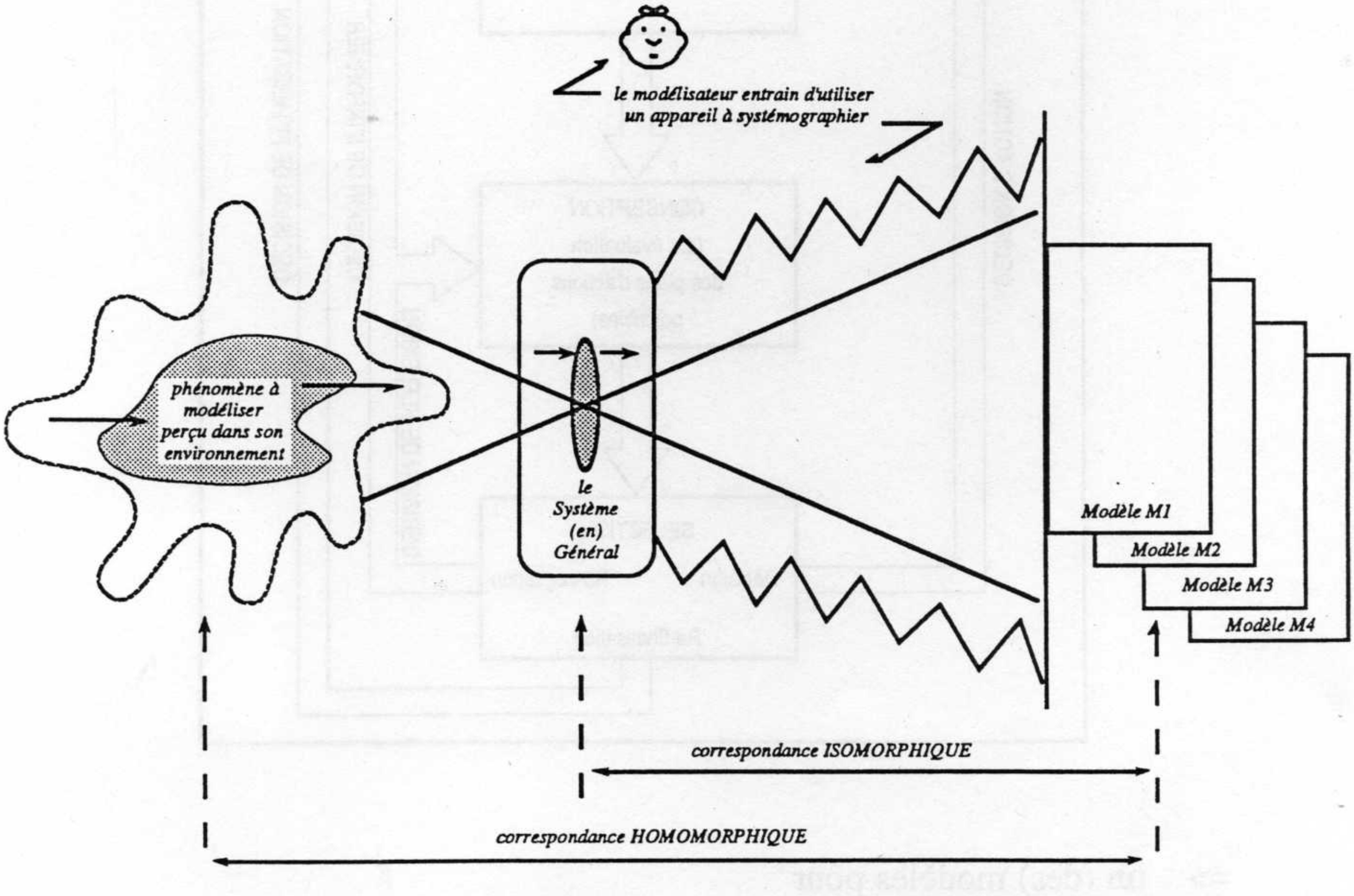
Ici, la lentille est le "système en général", et c'est toute la question de la "systémique": comment documenter ce concept central de "système général"?
On peut alors choisir délibérément de respecter la complexité du phénomène en le représentant *par* et *comme* un système général (exemple: "que fait ..., dans quel environnement, pour quels projets, évoluant?" et non pas: "de quoi ... est-il constitué?").
Disposer d'un SG, c'est disposer d'une procédure de conception-construction de modèle.

2) cadrage

On établit une correspondance isomorphique modèle - système général: la conjonction des aspects du SG, présente dans le modèle M (ou les modèles M_i), valide le modèle.

3) développement du cliché

On documente M par correspondance homomorphique de M avec le phénomène perçu: on questionne donc le phénomène, à travers le filtre du SG.



I-3 COMPLICATION, COMPLEXITE, INCERTITUDE, INFORMATION...

- notion de complication:

La complication, conçue comme enchevêtrement d'interactions, de rétroactions, n'est qu'un élément de la complexité. La complication (x) peut être quantifiée, puisqu'elle croît avec
- le nombre n d'éléments (ou processeurs)
- et surtout le nombre et la nature de leurs interrelations (caténaires ou bouclées) -> c
-> par exemple, $x \approx nc^2$.

Un phénomène ne peut être réductible à un modèle "compliqué" qu'à condition:
a) que le phénomène soit complètement décomposable, c'est-à-dire qu'on soit *sûr* de n'avoir oublié aucun élément ou variable importante;
b) que les effets s'expliquent régulièrement par des causes *clairement* identifiables;
c) que les "évidences objectives" (*sûr*, *clairement*, ...) ne soient reconnues comme telles que dans le cadre d'une idéologie donnée, identifiée.

Pour comprendre un phénomène compliqué, on peut l'*expliquer* en le simplifiant, c'est-à-dire en analysant chacun de ces éléments et relations (cf approche dite "analytique" ou "cartésienne").

<u>*complication <-> multiplicité:*</u> <u>*simplifier un système compliqué pour découvrir son explication*</u>

C'est dire qu'aucun phénomène ouvert, par exemple vivant (biologique, psychologique, social, culturel...) ne peut être assimilé à un modèle "compliqué", nécessairement fermé.

- notion de complexité:

Pour J.C. Lugan, un système complexe est un système que l'on tient par définition irréductible à un modèle fini, aussi sophistiqué soit-il. La notion de complexité implique:

- la possibilité d'imprévisibilité (ou, ce qui en pratique revient au même, une prévisibilité non calculable), donc d'*incertitude*.

- l'émergence plausible du *nouveau* et du sens au sein du phénomène.

- la possibilité de phénomènes *paradoxaux* (par exemple, l'un *et* le multiple: la société constituée de volontés individuelles, la matière et la physique quantique, le tout n'étant pas réductible à la somme de ses parties).

- l'inséparabilité de certains éléments, c'est-à-dire l'indécomposabilité du système en éléments simples, identifiables et stables.

-> complexité = complication $\cap$ incertitude $\cap$ perçu paradoxal ...

Pour Edgar Morin *[introduction à la pensée complexe - 1990]*, est complexe ce qui ne peut se résumer en un "maître mot", ce qui ne peut se ramener à une loi, ce qui ne peut se réduire à une idée simple.

L'action du modélisateur ne peut plus être ignorée: il interroge le phénomène et le modélise pour construire son sens: processus rétroactif, bouclé. Ceci correspond à la pensée "constructiviste" de Gaston Bachelard *[la formation de l'esprit scientifique - 1938]*: "Rien ne va de soi. Rien n'est donné, tout est construit", qui se démarque de la pensée "positiviste" de Auguste Comte [cf. Lemoigne 90].

<u>*complexité <-> perplexité:*</u> <u>*modéliser un système complexe pour construire sa compréhension*</u>

- notion d'incertitude

l'incertitude (u) est une caractéristique importante de la situation de projet:
pas d'objectif immuable, et encore moins de solution définitive

d'où la nécessité de "réducteurs d'incertitude" (à adapter aux finalités):
feedback (repères sur le réel comparé au projeté)
organisation, planification (repères temporels, structurels)
réserves (effet inertiel évitant une variation brusque)
simulation (effet prévisionnel) ...

- relation incertitude - complexité - information [cf. Lemoigne 74]

la quantité d'information i nécessaire à une organisation est une fonction croissante de la complication x et de l'incertitude u :

-> $i = f(x,u)$ avec f croissante

Selon Galbraith la capacité cognitive q d'une organisation efficiente (qui correspond à ses finalités -point de vue qualitatif) doit être au moins égale à la quantité d'information circulant par une unité de temps élémentaire T.
Si on se situe au plan de l'efficacité (atteindre les objectifs avec un bon rendement - point de vue quantitatif) on visera l'égalité.

. La prise en compte de la complexité et de l'incertitude conduit à une typologie des systèmes d'information, et des solutions organisationnelles selon les matrices (u, x) suivantes:

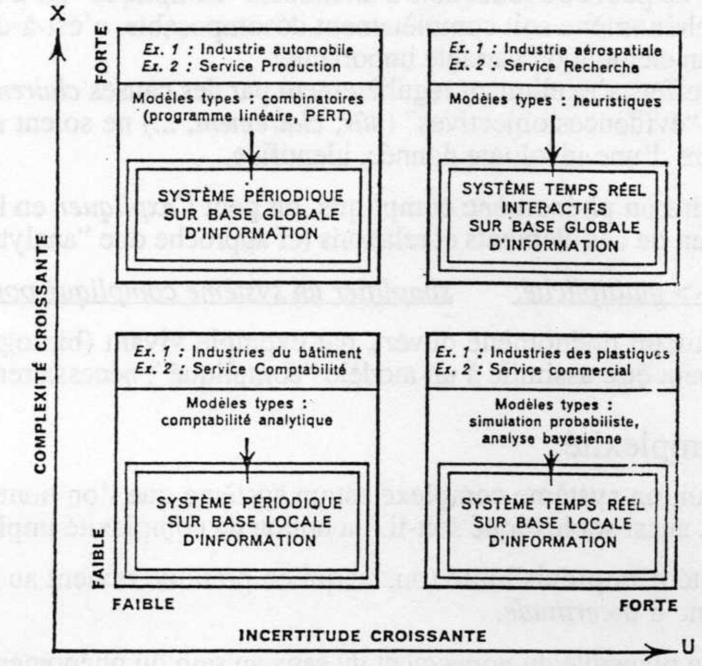


FIG. 35. — *La matrice U.X*
Classification des systèmes d'information

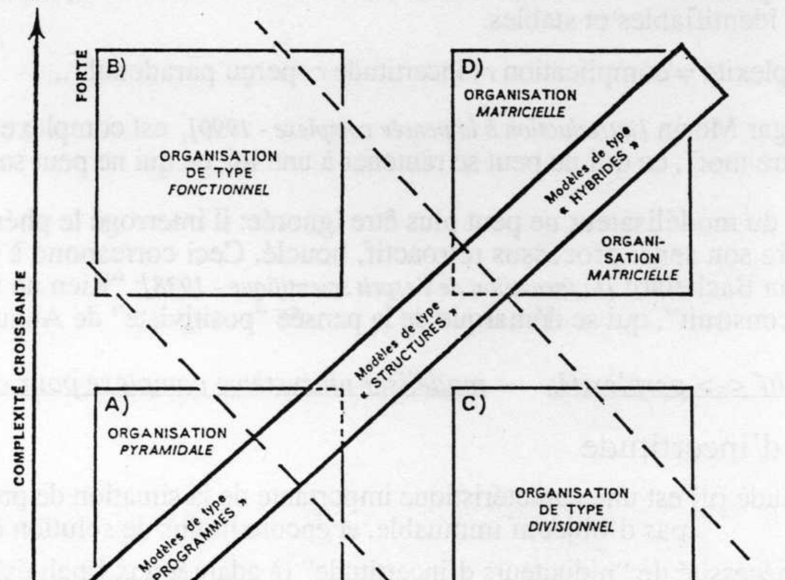


FIG. 36. — *La matrice U.X*
Classification des organisations

A complexité faible, incertitude faible structure pyramidale, hiérarchique
B complexité croissante, incertitude faible organisation fonctionnelle,

II TYPES D'APPROCHES POUR LA MODELISATION

II-1 approche analogique:

- l'analogie, référence aux connaissances acquises (expérience)

ça fait penser à... (analogie de transgression)
ça ressemble à... (analogie de ressemblance)
ça marche comme... (analogie fonctionnelle)

L'analogie a pour objet l'établissement de relations, rapports et proportions. Elle permet l'utilisation, dans un domaine, de modèles validés pour un autre.

- avantages et limites opératoires

modélisation "ouverte" MAIS
perte de l'échelle
risque de confusion: "ça fait penser à..." ⇒ ? "ça marche comme..."

II-2 approche analytique:

- la logique "classique" (aristotélicenne)

axiome d'identité: "ω *est* ω" $(\omega = \omega)$

axiome de non-contradiction: "il n'est pas possible d'affirmer et de nier en même temps" (ou bien "B ne peut être à la fois A et non-A"): $\omega.\varpi = 0$

axiome du tiers exclus: "toute chose est affirmée ou niée" (ou bien "B est forcément A ou non-A): $\omega + \varpi = 1$

ceci constitue la base de la décomposition analytique

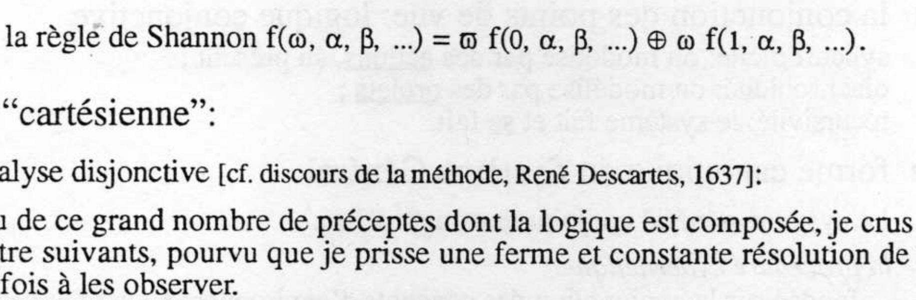
$$\Rightarrow \quad \varpi \oplus \omega = 1.$$

sur la base de la règle de Shannon $f(\omega, \alpha, \beta, ...) = \varpi\, f(0, \alpha, \beta, ...) \oplus \omega\, f(1, \alpha, \beta, ...)$.

- la méthode "cartésienne":

méthode d'analyse disjonctive [cf. discours de la méthode, René Descartes, 1637]:

"Ainsi, au lieu de ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurais assez des quatre suivants, pourvu que je prisse une ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois à les observer.
Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle, c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention, et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit que je n'eusse aucune occasion de la mettre en doute.
Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.
Le troisième, de conduire par ordre mes pensées en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés, et supposant de même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement.
Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales que je fusse assuré de ne rien omettre."

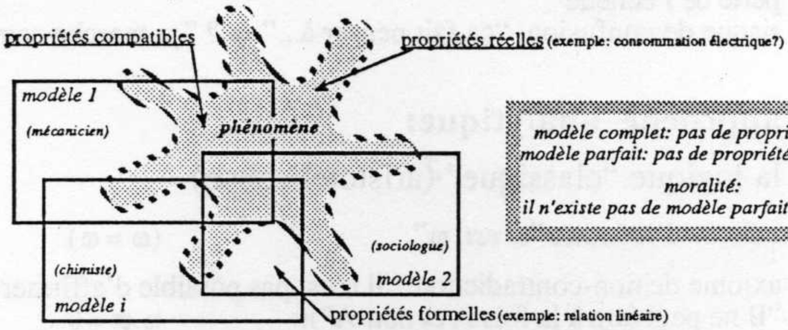


(principe de l'analyse)

- avantages et limites opératoires
    + logique efficace pour une vision "mécaniste" des sytèmes perçus compliqués
    + intéressant pour la phase de réalisation (codage logiciel par exemple)
    - processus de réflexion (trop) bien connu, risque d'utilisation non intentionnelle
    - démarche trop "fermée" pour la phase de conception de systèmes complexes
    - problème de l'évolutivité: ω sera-t-il éternellement ω?
    - problème du point de vue: qui observe? ($\omega \neq \omega$?)
    - procédure imprécise: découper, oui, mais comment? où placer le $\oplus$?
      (par exemple: l'organisation est-elle l'action ou le produit de l'action?)

      $\boxed{\textit{organisation}}$

    - pb de la réversibilité et de la continuité (le tout est-il la somme des parties?)
    - pb de l'exhaustivité: modèle parfait, modèle complet?



modèle complet: pas de propriétés rélles
modèle parfait: pas de propriétés formelles
moralité:
il n'existe pas de modèle parfait et complet

    - réductionnisme: interaction avec l'environnement et évolutivité du système exclues
    - rejet du paradoxe ($\omega.\varpi \neq 0$): pas de remise en cause des objectifs et des méthodes

II-3 approche systémique:

II-3-1 la conjonction des points de vue: logique conjonctive

synchronicité: on modélise par des <u>actions</u>, au présent ;
diachronicité: on modélise par des <u>projets</u> ;
récursivité: le système fait et <u>se</u> fait.

II-3-2 forme canonique du Système Général

Le système général conjoint deux approches:

la procédure cybernétique:

fondée sur la conjonction des concepts d'environnement actif et de projet (téléologie):
exemples: environnement "désert" $\cap$ projet "survivre" = "chameau"
environnement "pôle nord" $\cap$ projet "survivre" = "ours blanc"
(noter que le chameau n'est plus un assemblage de pattes, tête, bosses, ...)

la procédure structuraliste et fonctionnelle:

fondée sur la conjonction de fonctionnement (synchronique) et de transformation (diachronique)
exemple: la respiration chlorophyllienne des plantes est un fonctionnement synchronique (échanges énergétiques lumière - O_2 - CO_2), inséparable de la croissance des feuilles, qui est transformation diachronique.

Le "système général" intègre donc les questions suivantes:

<u>finalités</u> -> pourquoi? (moyen ou long terme)

<u>environnement</u> -> où? (réalisation, besoins non fonctionnels: environnement technologique, culturel, ... contraintes)

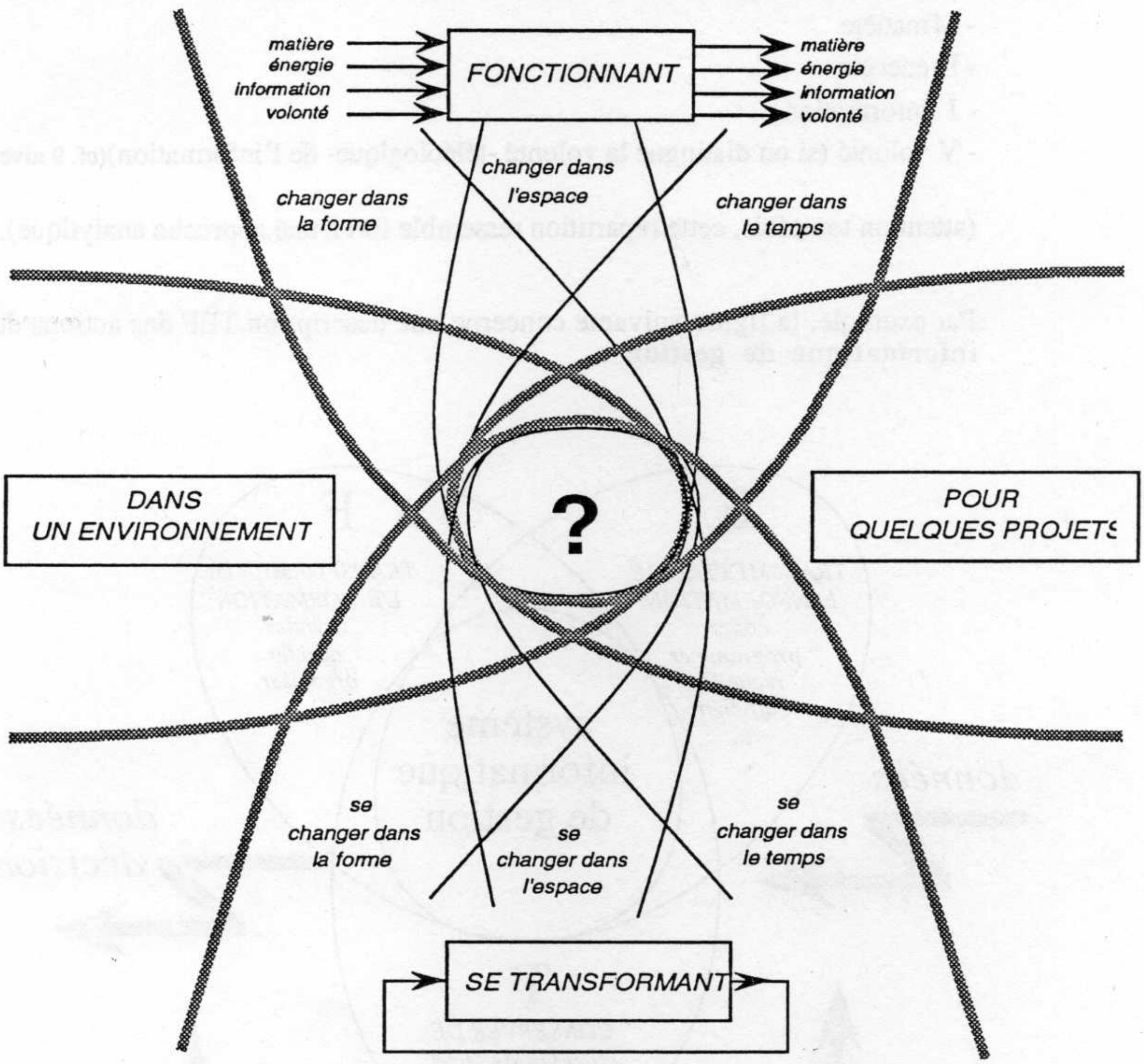
<u>fonctions</u> -> qui (fait) quoi? (conception, identifier les besoins fonctionnels),
-> comment? (en termes d'organisation et structure, pas en termes de solutions)

<u>transformations</u> -> quand?, juqu'à quand?

"le système général se modélise en tant qu'action, dans un environnement, pour quelques projets, fonctionnant, et se transformant"

dans $\cap$ pour $\cap$ faire $\cap$ devenir
par contraste avec
objet 1 $\oplus$ objet 2 $\oplus$ objet 3 $\oplus$ …

***un phénomène modélisable est perçu en tant qu'
action
dans un environnement,
pour quelques projets,
faisant (fonctionnant),
et se faisant (se transformant)***



II-3-2 illustration des concepts mis en oeuvre dans le Système Général

modélisation basée sur le concept d'environnement :

Par exemple, en psychologie, l'approche systémique s'intéressera au patient en tant que lien entre les différents acteurs d'un contexte familial ou social dont il révèle les fonctionnements (et dysfonctionnements) : la thérapie fera intervenir ces participants, sous forme physique ou symbolique. Ceci complète l'approche analytique centrée sur l'individu confronté à sa libido (en analyse freudienne), traité de façon isolée.

modélisation basée sur le concept de finalité :

On considère donc qu'un phénomène n'est pas modélisé tant qu'un *sens* ne lui a pas été donné. S'il s'agit par exemple d'une personne marchant erratiquement (action) en ville (environnement), le modélisateur ne rendra intelligible ce fonctionnement que s'il peut lui attribuer une finalité (faire du tourisme ou trouver un micro d'occasion ?).

modélisation basée sur le concept d'action:

Un système est donc considéré a priori comme un *processus*, c'est-à-dire un complexe d'actions multiples et enchevêtrées, que l'on perçoit par l'action résultante. On distingue trois actions archétypes (T, E, F):

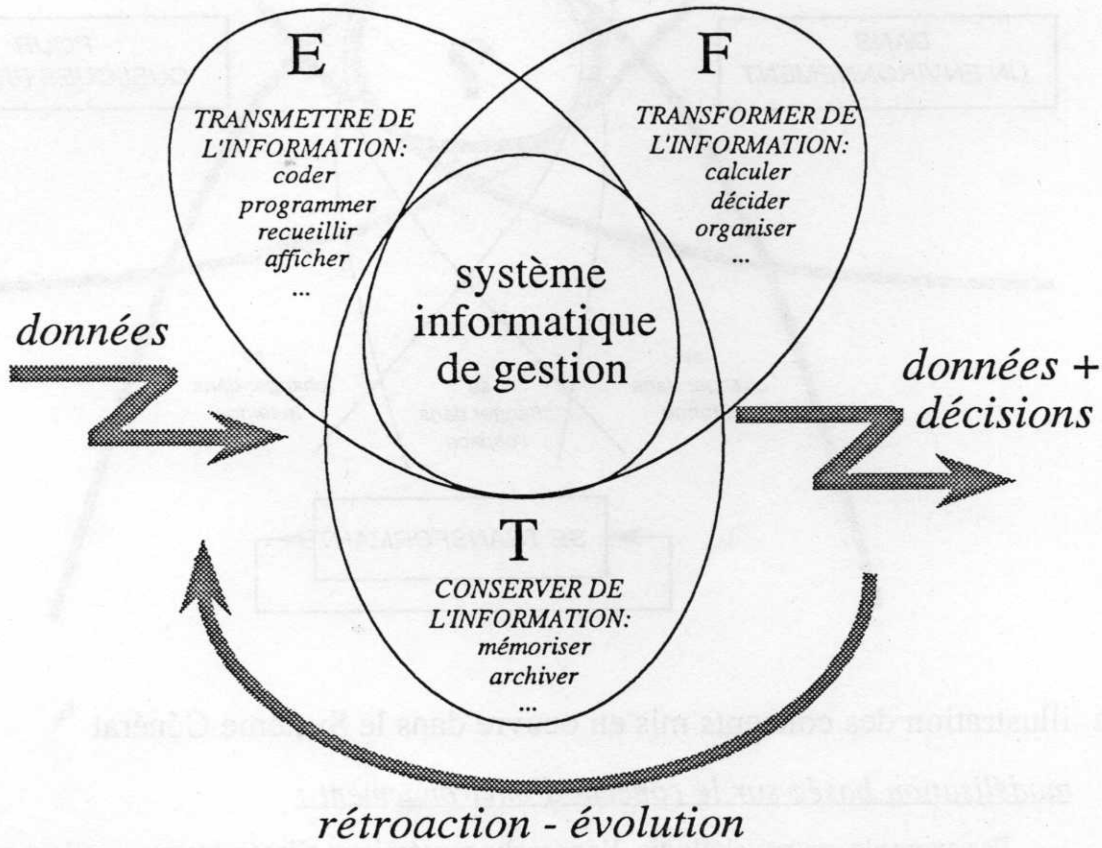
- T l'action de transfert temporel: stockage, mémorisation, ...
- E l'action de transfert dans l'espace: transport, transmission, ...
- F l'action de changement morphologique: transformation, traitement, computation, ...

ces processeurs agissant éventuellement sur plusieurs types de variables d'entrée-sortie:

- M matière
- E énergie
- I information
- V volonté (si on distingue la volonté -téléologique- de l'information)(cf. 9 niveaux).

(attention toutefois, cette répartition ressemble fort à une approche analytique).

Par exemple, la figure suivante concerne une description TEF des actions dans un système **informatique de gestion :**



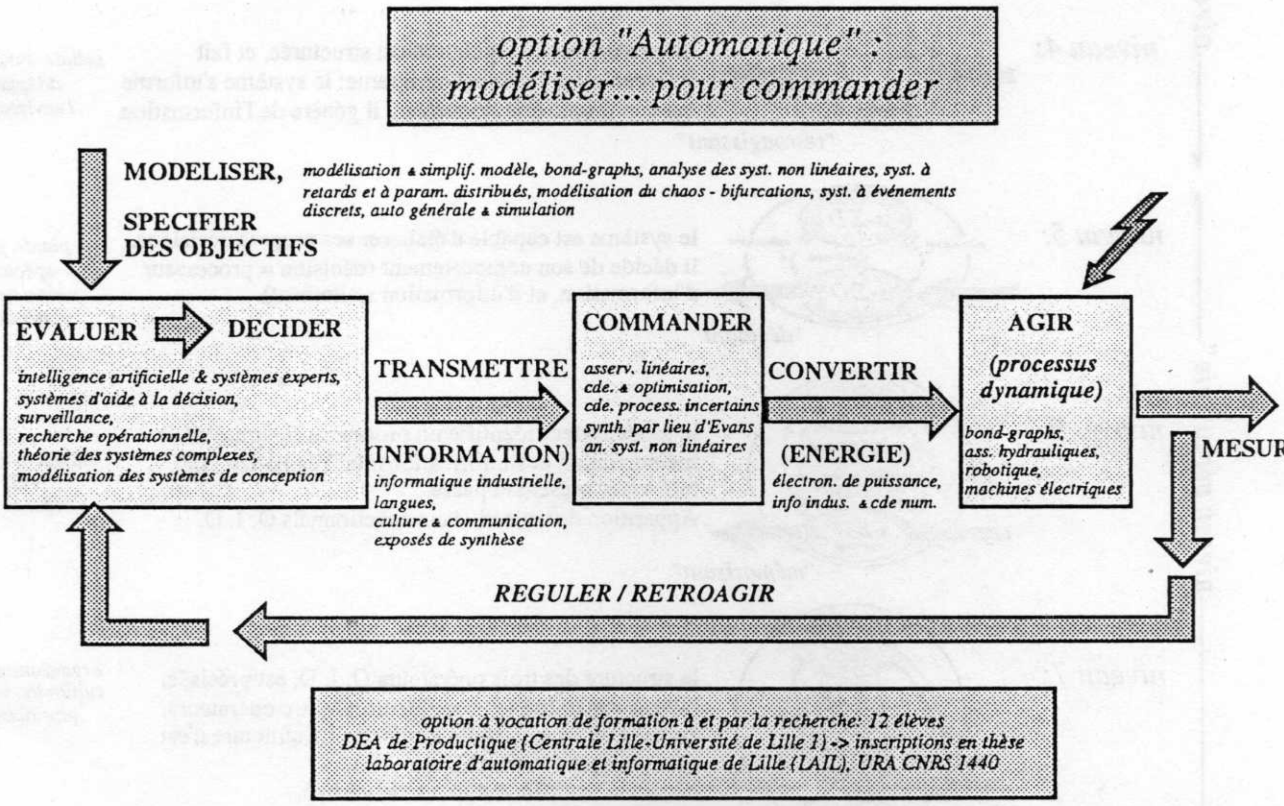
Le système de gestion est ici caractérisé par sa fonction (recueillir des données pour produire des décisions) indépendamment de son support matériel ou énergétique : c'est, sous cet angle, un processus traitant essentiellement de l'information / décision.
La complexité du système n'est modélisée qu'en introduisant la flèche "rétroaction - évolution". Sans elle, le système apparaît immuable, ses décisions ne le concernent pas, il ne peut changer d'objectifs ou d'organisation. Avec ce *feedback*, le système organise et s'organise.

modélisation basée sur le concept d'évolution par rétro-action :

Selon le principe de récursivité (ou de non séparabilité), un phénomène complexe transforme en se transformant : c'est le cas de tous les processus de régulation (cf. cours d'automatique), d'apprentissage (agir change la manière d'agir), de croissance (cf. ci-dessus la respiration chlorophyllienne des plantes), d'organisation (l'organisation qui s'organise), etc ...

Le concept de base permettant de modéliser cette récursivité est la rétro-action (feedback), base de tout système dynamique.

A titre d'exemple, la formation de l'option automatique peut être modélisée comme suit, reprenant le principe du feedback pour situer les finalités et interactions des différents cours :



II-3-4 l'approche systémique: une conception intentionnelle de modèle:

le "modélisateur-système" peut bien-sûr utiliser toute approche (analytique, analogique, systémique...) *à condition d'être conscient de choisir selon des finalités de modélisation.*

Il choisi notamment le niveau de complexité de son modèle: selon une proposition issue de K.E. Boulding (économiste, 1956) reformulée par Lemoigne, on peut décrire un système suivant une progression de 9 niveaux de complexité perçue, mettant en évidence trois opérateurs O, I, D (et non pas trois localisations géographiques!):

Opérationnel (production, action)

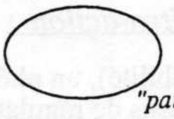
Informationnel (mémorisation, traitement, communication

Décisionnel (pilotage, coordination, objectifs

suivant le shéma de la page suivante:

niveau perçu "machine"

niveau 1:



"patate"

le phénomène est identifiable (nommé)

structure statique, charpente

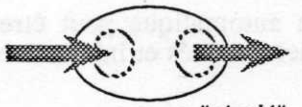
niveau 2:

"agissant"

le phénomène est (perçu comme) actif, Certaines variables sont jugées pertinentes pour la description de (certains) comportements [sorties] et de (certaines de) leurs causes [entrées]

structure dynamique, cinématique, rôle du temps

niveau 3:



"régulé"

on constate une certaine régularité de comportement => perception d'une "régulation" interne au système.

effet retour, homéostat, régulation

niveau 4:

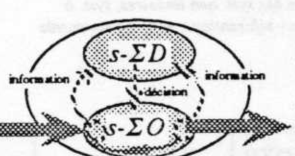
"rétroagissant"

on perçoit que la régulation est structurée, et fait intervenir une information interne: le système s'informe sur son propre comportement, il génère de l'information.

cellule, système ouvert, adaptation à l'environnement

niveau perçu "vie"

niveau 5:

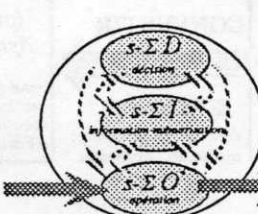


"décidant"

le système est capable d'élaborer ses propres décisions, il décide de son comportement (décision = processeur d'information, et d'information seulement).

plante, fonctions spécialisées, vision synthétique nécessaire

niveau 6:

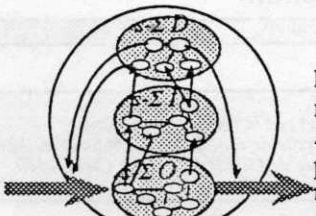


"mémorisant"

le modélisateur identifie un processus (interne) de mémorisation des informations: la "régulation" fait intervenir présent et passé.
Apparition de trois niveaux fonctionnels O, I, D.

animal, conscience de l'objectif (ex: survivre)

niveau 7:



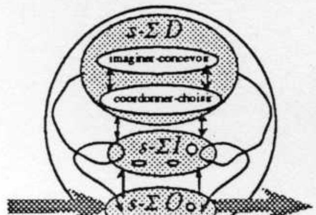
"organisant"

la structure des trois opérateurs O, I, D, est précisée, faisant apparaître les coordinations entre opérateurs. Apparition de sous-sous-systèmes. La structure n'est plus purement hiérarchique: nécessité de différenciation, de variété.

organisation sociale et culturelle, management pluridisciplinaire

niveau perçu "humain"

niveau 8:

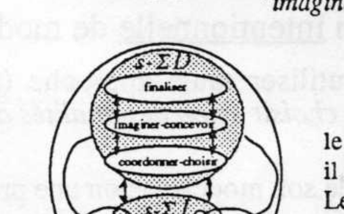


"imaginant"

le système peut imaginer des nouvelles décisions ou stratégies. Apparition d'un niveau "intelligence".

niveau de l'humain: l'individu considéré comme un système: performances précédentes plus capacité d'interpréter les symboles.

niveau 9:



"autofinalisant"

le système peut décider de sa propre finalité: il s'auto-finalise.
Le système décide et *se* décide.

systèmes "transcendendaux", éthique, métaphysique...

II EXEMPLES DE MODELES ET DE METHODES DE MODELISATION

II-1 modèles de l'information:

-> analytique

modèle de Shannon, entropie:

Ce modèle mesure la *quantité* d'information contenue dans un message (mais pas son *sens*): imaginons l'exemple du prisonnier isolé dans sa cellule, à qui sa femme veut faire passer un message. Ils ont convenu d'un code de communication dont le support est la tasse de café que le geolier (complaisant) fait passer au prisonnier: si la tasse de café est pleine et sucrée, alors il fait beau dehors, si de plus la petite cuiller est absente mais que la sous-tasse est bien là, alors sa femme s'ennuie de lui, etc... On comprend que la quantité d'information transmissible est liée à la variété du support: une tasse toujours pleine, sucrée, avec petite cuiller et sous-tasse sera peut-être agréable mais n'apportera plus aucune information...

-> 1[er] principe: probabilité = 1 $\Leftrightarrow$ information = 0.

Si on considère le cas d'une variable aléatoire X, pouvant prendre les valeurs (modalités) x_1, x_2, ... x_n avec les probabilités p_1, p_2, ... p_n, on peut a priori modéliser l'information véhiculée par X comme le nombre minimum de questions qu'on aurait eu à poser pour connaître la valeur prise par X, si on n'avait pas reçu le message donnant la valeur de X. Si les questions sont dichotomiques (réponse par oui ou non), et dans le cas équiprobable p_i=p_j=1/n, on aura à en poser $\log_2 n$, qui représente donc l'incertitude (variété, désordre...) liée à X. Cette quantité est appelée **entropie** de X, qui est l'autre facette de l'information (l'information est une diminution d'entropie):

$$H(X) = \log_2 n \quad \text{(l'unité d'entropie est le bit)}$$

Dans le cas non équiprobable, $p_i \neq p_j$, on a une probabilité p_i de poser $\log_2(1/p_i)$ questions pour aboutir à la modalité a_i, soit:

$$H(X) = - \Sigma_{i=1, \dots n}\, p_i \log_2 p_i$$

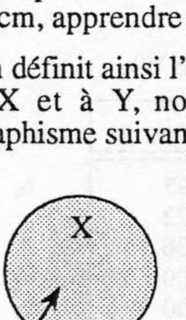
(formule de l'entropie au sens de Shannon).

-> 2[ème] principe: l'entropie est maximale dans le cas équiprobable (donc dans le cas où le désordre est maximum); elle est nulle lorsqu'une modalité est certaine.

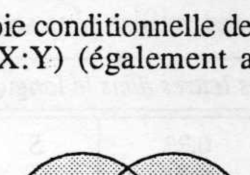
symbolisme graphique de l'entropie:

On représentera l'entropie de la variable X par une surface d'aire H(X), et celle de l'ensemble {X,Y} par l'aire de la surface union X∪Y. Ceci symbolise le fait que l'information apportée par un message {X,Y} est en général inférieure à l'information apportée séparément par X et par Y (par exemple, la taille et l'age d'une même personne sont liées: si on apprend qu'un individu mesure 50cm, apprendre ensuite qu'il est très jeune ne sera pas aussi instructif...).

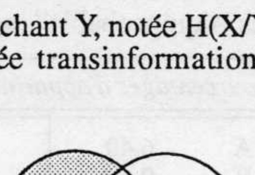
On définit ainsi l'entropie conditionnelle de X sachant Y, notée H(X/Y), et l'information commune à X et à Y, notée I(X:Y) (également appelée transinformation externe), correspondant au graphisme suivant:



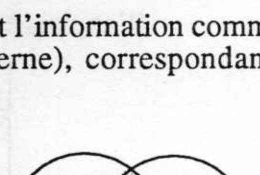
aire représentative de H(X)



H(X∪Y) *(entropie de l'ensemble {X,Y})*



H(X/Y) *("X sachant Y")*



I(X:Y) *(information commune à X et Y)*

Ce symbolisme permet de mieux comprendre les définitions et propriétés suivantes:

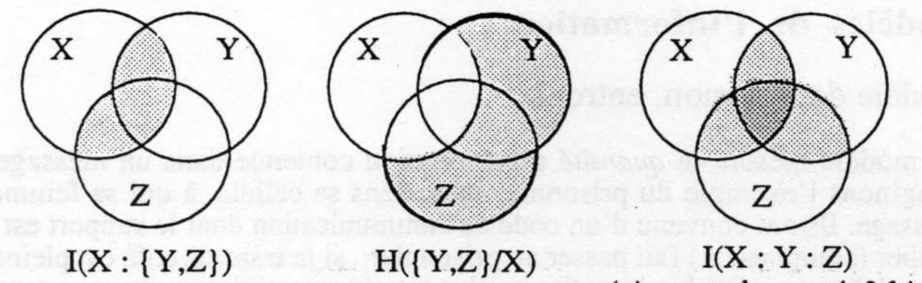
$H(X \cup Y) = H(Y) + H(X/Y) = H(X) + H(Y/X)$

$I(X:Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X)$

$H(X \cup Y) \leq H(X) + H(Y)$.

De façon plus générale, on définit:

$$I(X_1 : X_2 : \ldots : X_n) = \Sigma_{i=1,\,\ldots\,n} H(X_i) - H(\cup_{i=1,\,\ldots\,n} X_i) \qquad (\geq 0)$$



I(X : {Y,Z}) H({Y,Z}/X) I(X : Y : Z)

(aire centrale comptée 2 fois)

Les formules plus détaillées sont basées sur le calcul classique de probabilités:

probabilité de $(X=x_i$ et $Y=y_j) = p_{ij}$

probabilité de $(X=x_i) = p_{i.} = \Sigma_j\, p_{ij}$

probabilité de $(Y=y_j) = p_{.j} = \Sigma_i\, p_{ij}$

probabilité de $(X=x_i$ sachant $Y=y_j) = p_{i/j} = p_{ij} / p_{.j}$

$$\Rightarrow H(X/Y) = H(X \cup Y) - H(Y) = -\Sigma_i \Sigma_j\, p_{ij} \log_2 p_{ij} + \Sigma_j\, p_{.j} \log_2 p_{.j} = -\Sigma_i \Sigma_j\, p_{ij} \log_2 p_{i/j}\,.$$

<u>exemple:</u>

Si on considère une langue de façon analytique (sans considérer le sens des mots!), on a:
Langue = { Alphabet, Dictionnaire, Synthaxe}.

Soit X un caractère d'un alphabet latin de 27 symboles (26 lettres plus un espace). Dans le cas équiprobable:
$H(X) = \log_2 27$ # 4.75 bit/caractère.

En respectant les fréquences de ces symboles dans la langue française (cf. tableau), on a:
$H(X$ / français$) = -\Sigma_{i=1 \text{ à } 27}\, p_i \log_2 p_i$ # 3.85 bit/caractère.

exemple de tirage équiprobable:

H ODIBARLLSIE UNTS TCERUMAGEVNOPZ

L'information apportée par le fait de savoir que la langue utilisée est le français est donc:
I(X : français) # 4.75 - 3.85 = 0.9 bit/caractère.

exemple de tirage respectant ces fréquences d'apparition:

SD ECNN UIHSADE TUP FORT JLBYQ ABA

(ça n'est guère évident qu'il s'agisse de français, si ce n'est que la longueur des mots a été racourcie).
Le même calcul pour la langue anglaise donne:
$H(X$ / anglais$) = -\Sigma_{i=1 \text{ à } 27}\, p_i \log_2 p_i$ # 4.03 bit/caractère

(l'anglais est plus "équiprobable", notamment utilise plus souvent le W).

pourcentages d'apparition des lettres dans la langue française

A	6,40	J	0,23	S	6,97
B	0,64	K	0,01	T	5,72
C	2,59	L	4,65	U	5,06
D	2,60	M	2,45	V	1,00
E	14,86	N	6,23	W	0,00
F	0,78	O	4,59	X	0,31
G	0,83	P	2,56	Y	0,21
H	0,61	Q	0,81	Z	0,08
I	5,91	R	5,55	espace	18,35

En respectant les fréquences d'apparition, mais aussi maintenant les lois probabilistes de succession de deux caractères (par exemple, B suit souvent M mais ne suit jamais Q...), on travaille sur des ensembles X composés de deux caractères $(X_1, X_2) \in \{A,B,C,\ldots,Z,\textit{espace}\}^2$ et on introduit les probabilités conditionnelles d'un caractère X_2 connaissant son prédécesseur X_1 (on parle alors de chaines de Markov d'ordre 2) $\{p(X_2=x_i \,/\, X_1=x_j)\}_{(i=1 \text{ à } 27)}$. On obtient par exemple, en respectant ces probabilités pour le français, le tirage suivant, déja plus caractéristique:

MONS DE LOUCHA PAS TUVENT ORAC

On peut ainsi continuer à modéliser la "langue" en se basant sur des chaines de Markov d'ordre plus élevé (3, 4..., de plus en plus coûteux en calculs) et espérer construire des algorithmes de reconstitution statistique de certains messages abîmés).

On peut aussi définir la redondance r d'un code (donc d'une langue...) par:

$$r = \frac{\text{(quantité d'information utilisée)}}{\text{(quantité d'information utilisable)}}$$

Par exemple, un code pouvant présenter n configurations (on considère ici, pour plus de simplicité, le cas équiprobable), mais n'en utilisant que u donnera:

$$r = \frac{\log n - \log u}{\log n} = 1 - \frac{\log u}{\log n}.$$

Le code BCD (Binaire Codant Décimal: 0 = <u>0000</u>, 1 = <u>0001</u>, ..., 9 = <u>1001</u>) donnera ainsi $n = 16$, $u = 10$ et r # 0.17 (17% de redondance).

Le code Morse (comme conversion de l'alphabet latin sur {. , - }) présente une redondance r # 0.

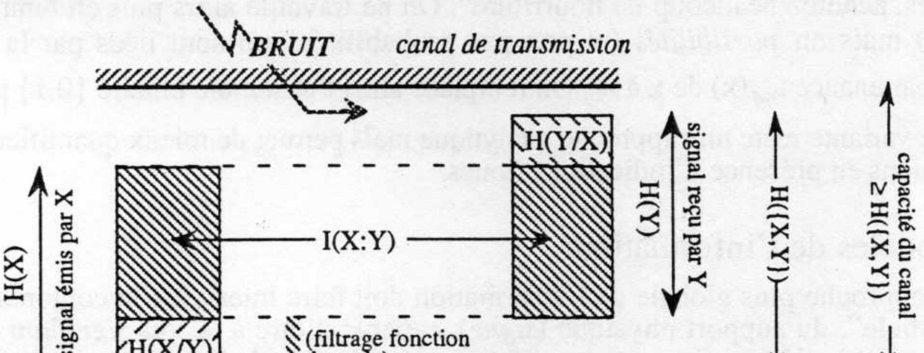
Le français compte environ 7000 mots de 5 lettres, alors que l'alphabet pourrait en générer 26^5# 12.10^6. On aurait donc 45% de redondance... ce qui signifierait qu'on peut utiliser moitié moins de papier pour faire les journaux (quoi que la lecture à voix haute en deviendrait difficile)!

Cette forme de redondance (cas habituel pour tout langage parlé) s'interprète par le fait que certaines configurations sont interdites: on quitte l'équiprobabilité, on pert en variété, donc en entropie, donc en information contenue. Elle permet par contre la prononciation, la reconstitution de messages altérés, la "lecture rapide", etc...

Rappelons que cette théorie ne modélise nullement le sens des mots.

modèle de Quastler: transmission bruitée de l'information

On considère un émetteur X et un récepteur Y, communiquant à travers un canal bruité, et avec un code donné. Le modèle de Quastler (biologiste, 1956) représente le fait que l'interlocuteur ne prend pas toute l'information qui lui est donnée, et qu'il comprend également des choses que l'on ne lui a pas dites (cf. l'exemple de Lemoigne (p. 106), X: "Vous souvenez-vous de cette personne dont le nom commence par un Z...", Y: "ah, oui! c'est Frizell!"). Il s'agit donc de "transmission transformante".



La pertinence d'un choix de communication (canal/code) peut être approchée en termes d'efficacité de la transmission, c'est-à-dire par le rapport I(X:Y)/H(X) si on cherche une simple recopie de l'information, ou bien H(Y)/H(X) si on cherche une évolution de l'information.

Ces rapports dépendent de l'<u>adaptation</u> du <u>protocole</u> de communication

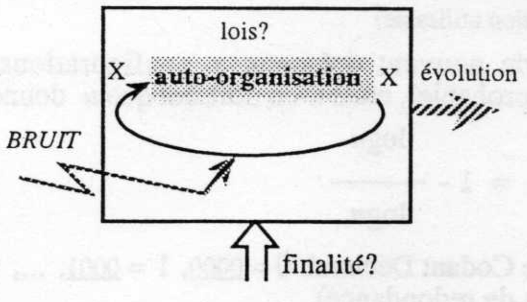
canal = support visuel, auditif, ...

code = langue, aptitude à suggérer, ...

au <u>récepteur</u> (spécialiste, grand public, ...) et à l'<u>émetteur</u> (quelle information envoit-il le mieux?) (voir aussi accomodation/assimiliation dans Lemoigne [p. 118]).

On comprend qu'une étude de communication entre partenaires complexes sort vite du modèle quantitatif $H(X) = - \Sigma p_i \log_2 p_i$, cependant il nous a permis d'illustrer ce discours.

Un cas particulier intéressant (cf. Lemoigne (p. 112-119)) est celui où X = Y, qui modélise une "auto-structuration par le bruit" ou encore une "auto-organisation" (par exemple l'image de l'évolution de l'univers proposée par Hubert Reeves: la vie est un filtre à hasard, programmé pour ne retenir que les bons coups... Si toutes les solutions devaient être testées, il serait impossible que l'univers n'ait "que" 15 milliards d'années, ou que l'ADN se soit construite sur 4,5 milliards d'années. Cette façon de voir implique la notion de téléologie (que ce soit la présence d'un "grand architecte", l'existence d'une finalité -point Ω de Theillard de Chardin- ou simplement de "lois de la nature" faisant intervenir des constantes - vitesse de la lumière, constante de Planck, zéro absolu... pour lesquelles toute variation infime eût empêché l'apparition de la vie).



opérationnalité et limites de ces modèles de l'information:

Les modèles ci-dessus donnent un bilan qualitatif, et non qualitatif. Il s'agit d'une approche analytique, ne reflétant pas la complexité: on modélise la *quantité* d'information, et non son *sens* ou sa *pertinence* ! On sait pourtant qu'on trouvera souvent plus d'information dans un bon rapport de quelques pages que dans dix mauvais livres de 250...

- utiles au niveau d'applications techniques (matériel, informatique, théorie du signal, génétique (ADN), ...), où on quantifiera l'efficacité d'un réseau de communication en termes de rapport signal/bruit: quelle est l'efficacité du protocole de communication (canal, code) au récepteur et à l'émetteur?

- inadaptés au niveau sémantique (vivant, humain) où sens et intelligibilité sont liés de façon complexe à l'esthétique et à l'émotionnel, où la polysémie engendre des contradictions ("je suis mais je ne suis pas"), etc...

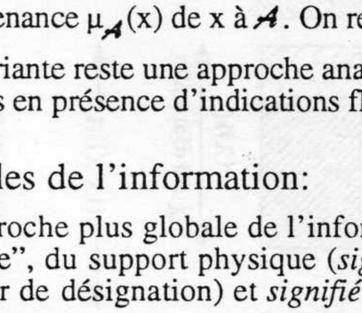
Le modèle de Shannon est basé sur les probabilités, et donc sur une logique analytique, disjonctive. On peut aussi introduire une description plus proche du raisonnement humain et de sa logique, en utilisant la théorie des *sous-ensembles flous* ("fuzzy sets"), initialisée par Zadeh en 1963, qui permet de modéliser des implications comme: "si il y a de nombreux invités assez jeunes, achetez beaucoup de nourriture". On ne travaille alors plus en binaire ($x \in \mathcal{A}$ ou exclusif $x \notin \mathcal{A}$) mais en *possibilités* (et non pas probabilités, qui sont liées par la contrainte $\Sigma p_i = 1$) d'appartenance $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ de x à $\mathcal{A}$. On remplace ainsi l'ensemble binaire $\{0,1\}$ par le segment $[0,1]$.

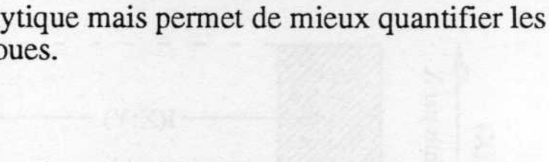
Cette variante reste une approche analytique mais permet de mieux quantifier les raisonnements et décisions en présence d'indications floues.

autres modèles de l'information:

Une approche plus globale de l'information doit faire intervenir la conjonction, présente dans le "symbole", du support physique (*signe*), capable d'être à la fois *signifiant* (producteur de sens, opérateur de désignation) et *signifié* (produit, résultat de la désignation). On peut par exemple utiliser des opérateurs auto-récurrents $f(X)$ pour lesquels f^n possède un point fixe quand $n \to \infty$:

symbole $X = f(f(f(f(\ldots(f(X))\ldots)))) = \lim_{n \to \infty} [f^n(X)]$.





II-2 (SA) analyse structurale et théorie des graphes:

analyse structurale, principe de décomposition:

On analyse des données, dont le nombre trop important dépasse la capacité cognitive du praticien (système *compliqué*): il faut donc les structurer pour les rendre intelligibles.

niveau 0: système-source (identification des variables de description)

niveau 1: système-donnée (tableau des modalités mesurées -ou spécifiées)

niveau 2: système-générateur (expression de relations génératrices entre variables)

niveau 3: système-structure (description par sous-systèmes interconnectés)

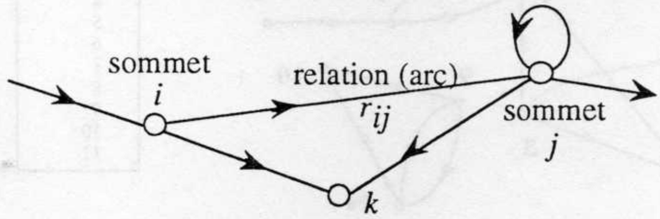
-> on choisit de partitionner le système de telle sorte que les échanges entre sous-systèmes soient minimisés, donc de regrouper entre elles les variables fortement couplées (relations fortes).

La structure peut être définie comme une organisation des éléments par un réseau de relations relativement stable (invariant) dans le temps (par exemple, le squelette -os articulés- comme structure mécanique de notre ours blanc).

Parmi les outils de l'analyse structurale figurent la théorie des graphes et toutes les méthodes de traitement de données.

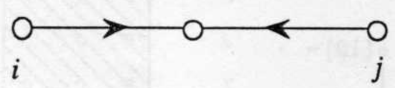
-> c'est bien une approche analytique:
on part de *données*, donc on suppose que les (bonnes?) questions ont déja été posées

-> un **graphe** = {sommets, arcs}, par exemple: sommets = variables, arcs = relations

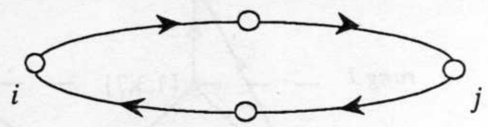


graphes à relations non valuées (perçues comme booléennes)

On considère dans un premier temps des arcs non valués: on modélise donc seulement la présence ou l'absence de relations entre deux sommets.Deux sommets *i* et *j* sont dits faiblement connectés s'il existe une chaine (non orientée) de relations entre *i* et *j*. Ils sont fortement connectés s'il existe une boucle (chemin orienté fermé) passant par *i* et *j* .



i et *j* faiblement connectés



i et *j* fortement connectés

Le principe du partitionnement en sous-groupes d'éléments est basé sur le regroupement des sommets fortement connectés. Si cela apparaît visuellement sur un petit graphe, on est amené à passer par des calculs matriciels dans le cas de graphes comportants de nombreux sommets et arcs. On utilise alors des calculs sur les "matrices de couplage".

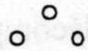
-> un graphe = une **matrice de couplage** $R = [r_{ij}]$:

on considère ici la présence ($r_{ij} = 1$) ou l'absence ($r_{ij} = 0$) d'une relation du sommet *i* vers le sommet *j*.

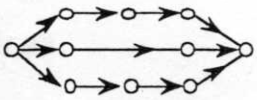
de \ vers	*i*	*j*	*k*
i	0	1	1
j	0	1	1
k	0	0	0

On veut faire émerger la/les structure(s) d'un graphe, comme par exemple:

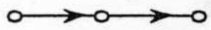
structure déconnectée:



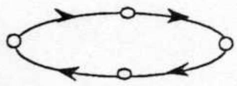
structure parallèle:



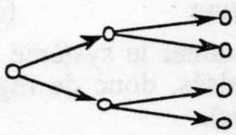
structure caténaire (cascade, série):



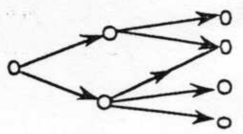
structure cyclique (bouclée, rétroactive):



structure hiérarchisée (arborescente):

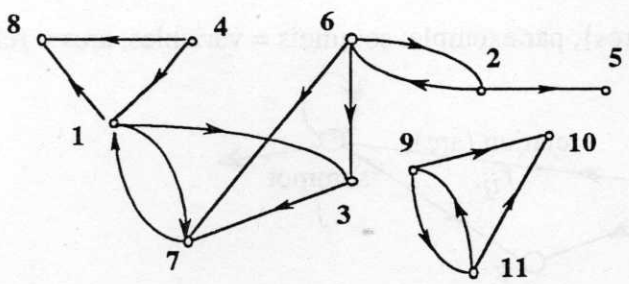


structure en treillis:



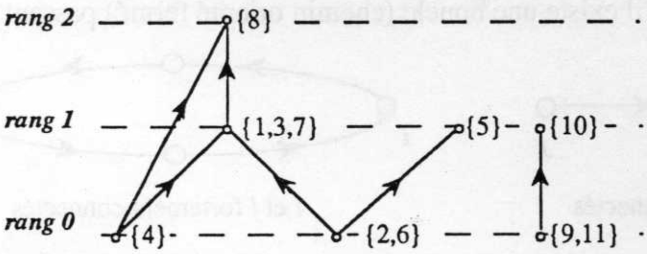
pour cela on procède à la réduction du graphe, en général à partir de calculs sur les puissances successives de la matrice de couplage (calculées en booléen), qui donnent la liste des successeurs et la liste des antécédents du sommet n° *i*: l'intersection des deux listes donne les sommets fortement connectés à *i*.
Par exemple, pour le graphe suivant (seulement 11 sommets, 16 relations):

graphe initial:



sommet x_i	successeurs $S(x_i)$	prédécesseurs $P(x_i)$	fort. connectés $S(x_i) \cap P(x_i)$
1	1,3,7,8	1,2,3,4,6,7	1,3,7
2	1,2,3,5,6,7,8	2,6	2,6
3	1,3,7,8	1,2,3,4,6,7	1,3,7
4	1,3,4,7,8	4	4
5	5	2,5,6	5
6	1,2,3,5,6,7,8	2,6	2,6
7	1,3,7,8	1,2,3,4,6,7	1,3,7
8	8	1,2,3,4,6,7,8	8
9	9,10,11	9,11	9,11
10	10	9,11	10
11	9,10,11	9,11	9,11

graphe réduit:



	10	9	11	8	1	3	7	5	4	2	6
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
6	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0

et dans ce cas, la matrice de couplage obtenue après regroupement et partionnement reflète bien la structure du graphe réduit (matrice bloc-triangulaire inférieure).

D'une façon plus générale, les structures correspondent à des formes particulières de partitionnements:

- stucture déconnectée: matrice diagonale, par exemple $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
- structure caténaire: matrice nilpotente, comme la forme de Jordan $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$
- structure cyclique: matrice de permutation, comme $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$.

relations d'information valuées, quantifiées par l'information

On peut généraliser les graphes vus précédemment en valuant les arcs: c'est le cas, par exemple, des fonctions de transfert (automatique, cybernétique) pour lesquelles les arcs sont valués par des fractions rationnelles de l'opérateur de Laplace *s* (dérivateur, systèmes dynamiques en temps continu) ou de l'opérateur *z* (itération, systèmes dynamiques récurrents, en temps discret).

On peut aussi utiliser la théorie quantitative de l'information vue plus haut, en attribuant à un arc (reliant un sommet X à un autre Y) la valeur de l'information I(X:Y) qui "circule entre X et Y. Le principe de décomposition-partitionnement reste de regrouper les variables qui échangent "beaucoup" d'information (métaphore de l'entreprise où on mettra dans le même bureau les collègues qui travaillent sur le même sujet, pour minimiser le nombre de courriers et coups de téléphone...). On peut choisir de modéliser le coefficient de couplage informationnel de deux variables X_i et X_j par:

$$r_{ij} = \frac{I(X_i : X_j)}{[H(X_i).H(X_j)]^{1/2}},$$ définissant ainsi la matrice de couplage informationnel *R* du système.

La même formule sera appliquée pour calculer le couplage entre deux sous-systèmes $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}_j$ du système complet $\mathcal{S}$: on peut alors estimer si un partitionnement $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots \mathcal{S}_m\}$ de $\mathcal{S}$ est suffisamment déconnecté, en calculant le rapport:

$\rho\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots \mathcal{S}_m\} = I(\mathcal{S}_1 : \mathcal{S}_2 : \ldots : \mathcal{S}_m) / I(X_1 : \ldots : X_i \ldots : X_n)$.

qui doit être faible pour que le partitionnement soit bon (pour les critères d'analyse structurale définis ci-dessus!).

Cette approche peut être complétée par la notion de modélisabilité d'une variable X_i par un sous-ensemble $\mathcal{S}_1 = \{X_1, \ldots, X_k\}$ de $\mathcal{S}$:

$mod(X_i/\mathcal{S}_1) = 1 - H(X_i/\mathcal{S}_1)/H(X_i)$.

Par exemple, si pour $\mathcal{S}_i = \mathcal{S} - \{X_i\}$ on a $mod(X_i/\mathcal{S}_i)\# 1$, alors on pourra sans trop de "perte d'information" retirer X_i des variables explicatives du système.

exemple: [thèse d'état Richetin, Toulouse 1975]

On traite ici, à titre d'illustration, le système constitué par un atelier de 5 machines X_i, qu'on cherche à modéliser en mesurant le fonctionnement de chaque machine à 14 instants différents (pour la meuleuse X_1, {1,2,3} signifient par exemple {meuler, ne rien faire, être en panne}).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
X_1	1	1	3	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	2
X_2	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	2	2
X_3	1	3	3	3	3	3	2	2	1	3	2	2	1	3
X_4	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2
X_5	1	1	2	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	1

calcul de la matrice de couplage informationnel $R = (r_{ij})_{i,j=1,\ldots5}$:

matrices de contingences et calcul statistique des probabilités pour le couplage r_{14} de X_1 et X_4 (basé sur le nombre de fois où $X_1 = x_i$ et $X_4 = y_j$):

x_i \ y_j	1	2
1	1	5
2	2	3
3	2	1

p_{ij}	1	2
1	1/14	5/14
2	2/14	3/14
3	2/14	1/14

$p_{i.}$
6/14
5/14
3/14

p_{ij}	1	2
1	1/14	5/14
2	2/14	3/14
3	2/14	1/14

$p_{.j}$	5/14	9/14

$H(X_1) = -\,6/14 \log_2(6/14) - 5/14 \log_2(5/14) - 3/14 \log_2(3/14)$ # 1.530

$H(X)_2) = -\,5/14 \log_2(5/14) - 9/14 \log_2(9/14)$ # 0.940

$$H(X_1/X_2) = -\,1/14 \log_2(1/5) - 5/14 \log_2(5/9) - 2/14 \log_2(2/5) - 3/14 \log_2(3/9) - 2/14 \log_2(2/5) - 1/14 \log_2(1/9) \;\#\; 1.412$$

$I(X_1{:}X_2)$# $1.530 - 1.412 = 0.118$

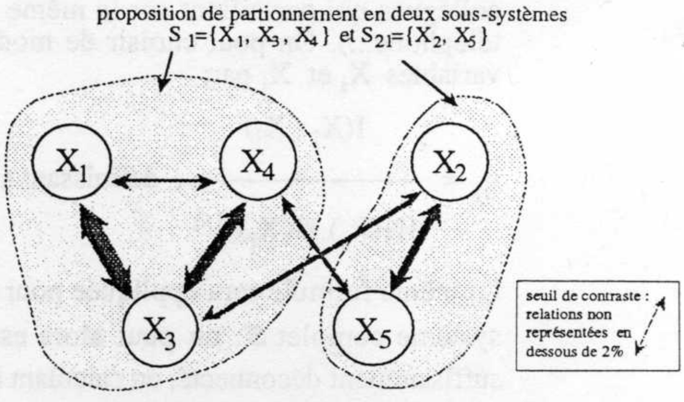
r_{14} # $0.12 / [1.530 \times 0.940]^{1/2}$ # 0.098

$r_{14} = r_{41}$.

On obtient ainsi la matrice de couplage informationnel et le graphe valué correspondant (dans le graphe, l'épaisseur de chaque arc est proportionnelle au couplage, avec application d'un niveau de contraste):

r_{ij}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1	0,02	0,34	0,09	0,00
X_2	0,02	1	0,06	0,02	0,16
X_3	0,34	0,06	1	0,21	0,02
X_4	0,09	0,02	0,21	1	0,05
X_5	0,00	0,16	0,02	0,05	1

matrice *R* de couplage informationnel



graphe de couplage informationnel

Le calcul du coefficient ρ correspondant au partitionnement qui apparaît "naturellement" sur le graphe: $\mathcal{S}_1 = \{X_1, X_3, X_4\}$, $\mathcal{S}_2 = \{X_2, X_5\}$, montre que le couplage informationnel entre les deux sous-systèmes reste fort: $\rho\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\} = I(\mathcal{S}_1{:}\mathcal{S}_2) / I(X_1{:}\ldots{:}X_5)$ # 0.51.

Le calcul des indices de modélisabilité $\mathrm{mod}(X_i/\mathcal{S}_i)$ de chaque variable X_i par l'ensemble des autres $\mathcal{S}_i = \mathcal{S} - \{X_i\}$ conduit au tableau suivant:

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
$H(X_i / \mathcal{S} - \{X_i\})$	0,29	0,14	0,29	0	0,29
$H(X_i)$	1,53	1	1,48	0,94	0,94
$100\ \mathrm{mod}(X_i / \mathcal{S}_i)$	81%	86%	80%	100%	69%

Sur ces bases (tant qu'il n'y a que ces 14 mesures!), on peut donc déduire que X4 n'est pas nécessaire à la description du système.

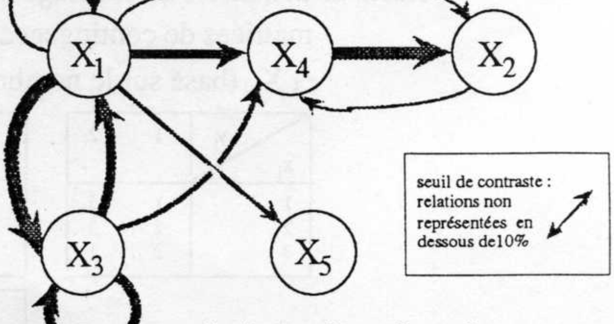
Jusqu'à maintenant, les couplages ont été calculés en statique: les relations entre variables sont modélisées à partir des mesures synchrones. On peut aussi introduire des couplages dynamiques en utilisant des chaînes de Markov d'ordre 2: on effectue les statistiques sur les variables X_i ($n^{\text{ième}}$ échantillon) et leurs successeurs X_j'($n+1^{\text{ième}}$ échantillon).

$$r_{ij}' = \frac{I(X_i' : X_j)}{[H(X_i').H(X_j)]^{1/2}} \qquad (\neq r_{ji}')$$

Le graphe déduit peut être interprété en termes de causalité, par exemple:

↗	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0,24	0,16	0,72	0,43	0,21
X_2	0,10	0,06	0,01	0,17	0,00
X_3	0,55	0,06	0,46	0,27	0,07
X_4	0,03	0,67	0,07	0,00	0,09
X_5	0,00	0,00	0,01	0,05	0,09

matrice *R* de couplage dynamique



graphe de couplage dynamique

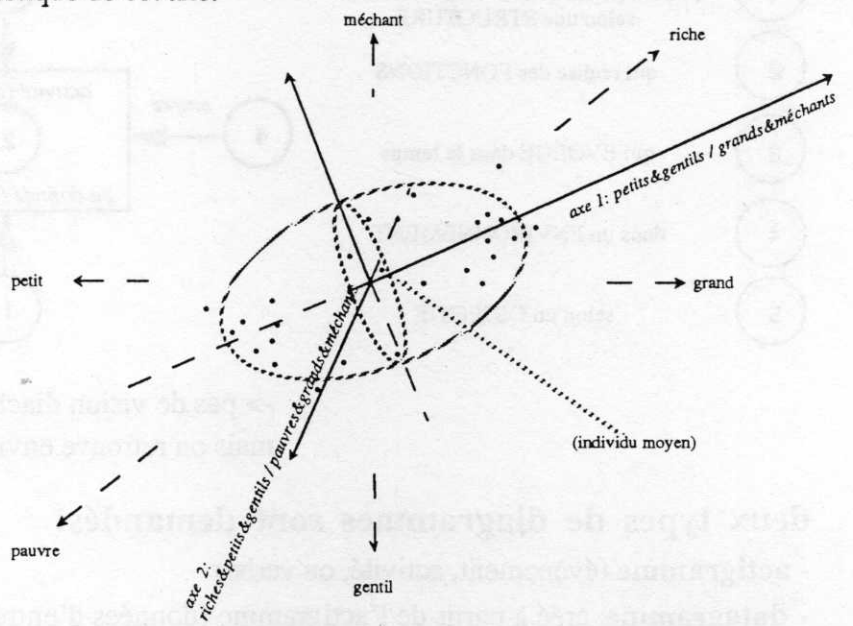
autres méthodes d'analyse de *données*

(voir par exemple [J.P. Benzecri, "l'analyse des données" Dunod, 1976])

AFCM analyse factorielle des correspondances multiples:

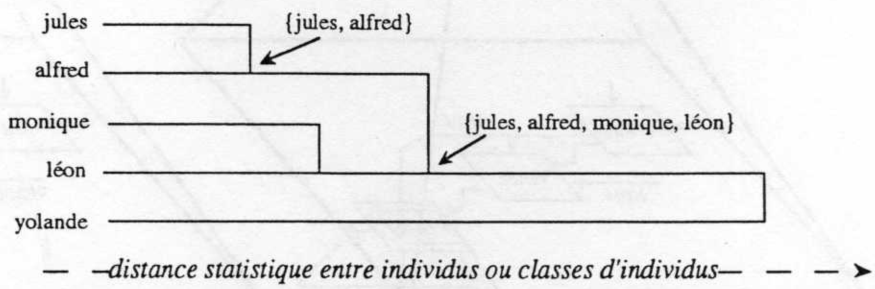
On cherche à définir des sous-ensembles présentant des "profils" communs ou opposés, donnant des caractéristiques "explicatives" du système.
Un tableau de données ("individus/caractéristiques" par exemple, après traitement, conduit à des points ("Mr. X, petit=1,5m et riche=10$ et méchant=2blessés") constituant un "nuage" dans un espace de dimension p, sur lequel on aura défini une distance, dite du κ^2 (khi-deux).

Ceci se fait en étudiant le problème classique de la physique des solides: chaque point est affecté d'un poids, donnant au nuage un centre de gravité et des axes principaux: le centre sera le "profil marginal" (c.à.d. moyen) et les axes seront les axes factoriels, définissant des caratéristiques explicatives du système: ce sont les axes le long desquels le nuage est particulièrement "étiré". Ainsi deux individus (ou regroupements) situés en large opposition de part et d'autre d'un axe seront distingués au sens de la caractéristique de l'axe . A l'inverse, deux points proches et situés près d'un même axe auront en commun la caractéristique de cet axe.



classification hiérachique des proximités

On représentera les données, après traitement, par un "dendogramme" reflétant lui aussi la proximité des individus, mais cette fois la représentation est hiérarchisée: chaque ligne (axe y) correspondant à un individu, la lecture selon l'axe horizontal x correspond à degré d'"éloignement" des individus: deux lignes voisines donneront une jonction de l'arbre proche de l'axe y.



conclusion sur les méthodes de type analyse de données, analyse structurale, ...

-> toutes ces approches sont bien "analytiques": tout repose sur la phase niveau 0 (exhaustivité? pertinence?), qui conditionne l'intelligibilité (interprétation) du niveau 3.

II-3 SADT (Structured analysis and Design Technique) (1976, Softech et ITT)-

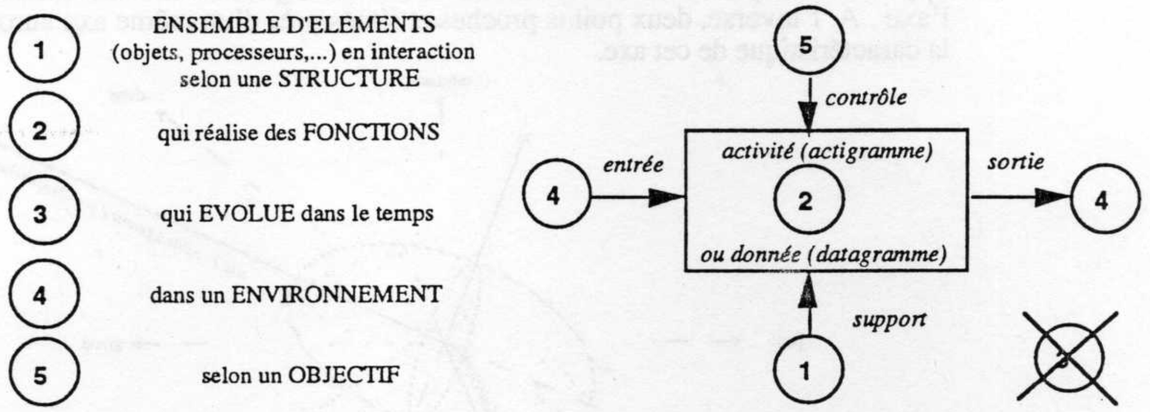
finalité:

finalité déclarée: "SADT est un langage pour communiquer des idées"
(par exemple, le fonctionnement d'une équipe SADT peut être décrit en SADT (cf P. Jaulent p.61)
permet 1) de modéliser le problème posé, avant de chercher à en exposer une solution,
et 2) une communication efficace entre les personnes chargées de résoudre le problème.

En pratique, SADT est utilisée pour faire de la spécification fonctionnelle.

caractéristiques:

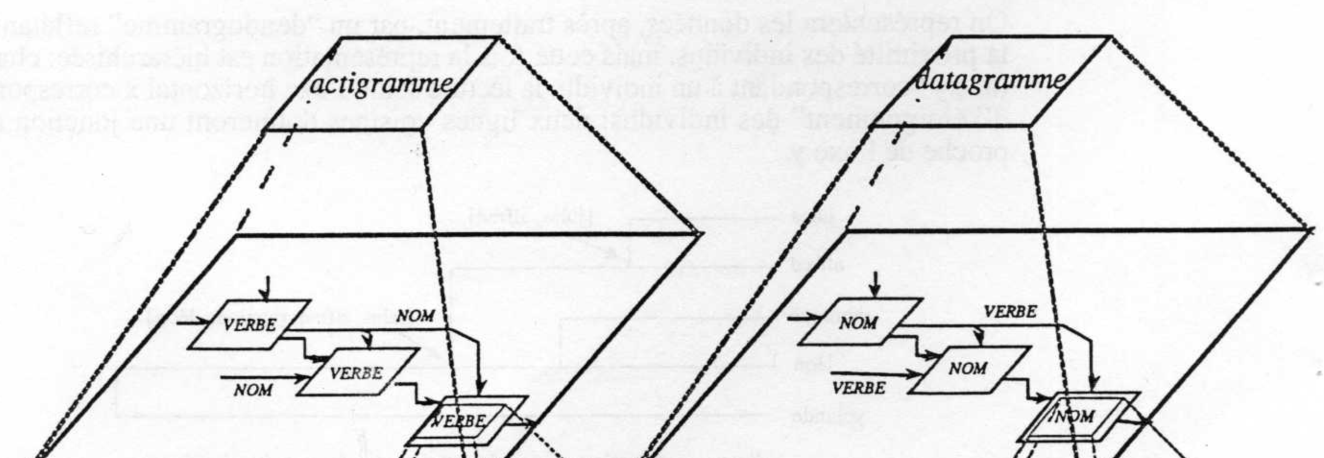
modélisation graphique, concise, par objets (noms) et actions (verbes).
structure de décomposition descendante hiérarchisée (diagrammes ordonnées fils/père), modulaire (boites), chaque niveau apporte un nombre limité de détails sur un sujet bien délimité: un diagramme doit comporter entre 3 et 6 boîtes.



-> pas de vision diachronique,
mais on retrouve environnement ∩ fonctions ∩ finalités

deux types de diagrammes sont demandés:

- **actigramme** (évènement, activité, ou verbe)
- **datagramme**, créé à partir de l'actigramme (données d'entrée, de manipulation, d'observation, d'utilisation)



Un "kit" SADT se compose de:

actigrammes,
équations d'activité de certaines boites (conditions d'activation)
datagrammes
diagrammes ou textes explicatifs,
liste hiérarchique des actigrammes et datagrammes,
glossaire
couverture de kit (pour échanges entre l'auteur, le bibliothécaire, et les lecteurs)

Exemple (cf. P. Jaulent):

Fonctionnement d'une équipe SADT

«*SADT est un langage pour communiquer des idées*» : Alors pourquoi ne pas expliquer l'organisation d'une équipe SADT en utilisant le langage SADT?

ACTIVITÉS

A01. Interviewer

A partir des directives fixées par la flèche de contrôle *Point de vue et le but du modèle*, l'auteur interroge (*interviewer*) le(s) experts du sujet à modéliser. Les *Notes* obtenues lors de cet interview constituent avec les *Documents* les différentes *Informations sur le sujet*.

A02. Créer les diagrammes et les modèles

L'auteur, responsable de l'activité "*créer les diagrammes et les modèles* transforme", à partir des objectifs imposés par le *Point de vue et le but du modèle*, les données d'entrées *Informations sur le sujet* en données de sortie *Nouveaux diagrammes*.

A01. Interviewer & A02 Créer les diagrammes et les modèles

L'auteur peut être amené, pour "*créer les diagrammes et les modèles*" à solliciter de nouveau les conseils de l'expert du domaine par la sortie *Demandes d'informations supplémentaires*.

A03. Organiser la distribution

Le libraire (ou bibliothécaire), responsable de l'activité "*organiser la distribution*", archive la donnée d'entrée *Nouveaux diagrammes dans le Fichier des modèles*, distribue les *Kits à commenter* aux différents lecteurs choisis par l'auteur et retourne à l'auteur, afin qu'il puisse continuer à travailler, une *Copie des kits distribués*.

A04. Inspecter et commenter

Le(s) lecteur(s) responsable(s) de l'activité "*inspecter et commenter*", lit(lisent) la donnée d'entrée *Kits à commenter*, corrige(nt) les erreurs flagrantes, s'assure(nt) que les directives fixées par le *Point de vue* et le *but du modèle* sont bien respectées, propose(nt) des alternatives, puis envoie(nt) et dans le temps imposé par l'auteur les *Kits commentés* au libraire.

A03. Organiser la distribution

Si le(s) lecteur(s) ne respecte(nt) pas le délai fixé par l'auteur pour commenter le kit, le libraire envoie un rappel à l'ordre au(x) lecteur(s) : *Rappels*.

A03. Organiser la distribution

Lorsque le libraire reçoit les *Kits commentés* du(des) lecteur(s), il distribue à l'auteur : *Ensemble de kits commentés*.

A02. Créer les diagrammes et les modèles

Lorsque l'auteur reçoit l'entrée *Kits*, il examine, toujours selon les directives fixées par le *Point de vue et le but du modèle*, les commentaires provenant les différents lecteurs auxquels il se doit de répondre par la sortie *Kits avec réponses de l'auteur*.

A01. Interviewer & A02 Créer les diagrammes et les modèles

L'auteur peut être amené, en fonction des commentaires fait par le(s) lecteur(s), à solliciter de nouveau les conseils de l'expert du domaine par la sortie *Demandes d'informations supplémentaires*.

A03. Organiser la distribution

Si l'auteur ne respecte pas le délai fixé par le(s) lecteurs(s) pour répondre aux commentaires, le libraire lui envoie l'ordre : *Rappels*.

A03. Organiser la distribution

Le libraire ou bibliothécaire, archive la donnée d'entrée *Kits avec réponse de l'auteur* dans le *Fichier des modèles*, distribue *Kits à commenter* aux différents lecteurs choisis par l'auteur et envoie à ce dernier, afin qu'il puisse continuer à travailler, une *Copie des kits distribués*.

A04. Inspecter et commenter

Le(s) lecteur(s) lit(lisent) la donnée d'entrée *Kits à commenter*, répond(ent) aux commentaires de l'auteur, puis envoie(nt) dans le laps de temps imparti les *Kits commentés* au libraire.

A03. Organiser la distribution

Lorsque le libraire reçoit les *Kits commentés* du(des) lecteur(s), ils les distribue à l'auteur : *Ensemble de kits commentés*.

A02. Créer les diagrammes et les modèles

Lorsque l'auteur reçoit l'entrée *Kits*, il examine, toujours selon les directives fixées par le *Point de vue et le but du modèle*, les commentaires provenant des différents lecteurs auxquels il se doit de répondre par la sortie *Diagrammes révisés*.

A01. Interviever & A02-Créer les diagrammes et les modèles

L'auteur peut être amené en fonction des commentaires faits par le(s) lecteur(s) à solliciter de nouveau les conseils de l'expert du domaine par la sortie *Demandes d'informations supplémentaires*.

A03. Organiser la distribution

Le libraire ou bibliothécaire archive la donnée d'entrée *Nouveaux diagrammes dans le Fichier des modèles*, distribue les *Kits à approuver* au comité technique responsable de l'activité *approuver*. Le libraire envoie à l'auteur, afin qu'il puisse continuer à travailler, une *Copie des kits distribués*.

A05. Approuver

Le comité technique intervient dans deux cas précis :
– pour délivrer *L'état d'approbation* du kit reçu en offrant l'un des trois labels ci-dessous :
– *Draft* (passage de *Working* à *Draft;*
– *Recommended* (passage de *Draft* à *Recommended*);
– *Publication* (passage de *Recommended* à *Publication*);
– pour arbitrer un différend entre l'auteur du kit et le(s) lecteur(s).
Après examen de la donnée d'entrée *Kits à approuver*, le comité technique délivre *L'état d'approbation* du kit et retourne le *Kit commenté* au libraire.

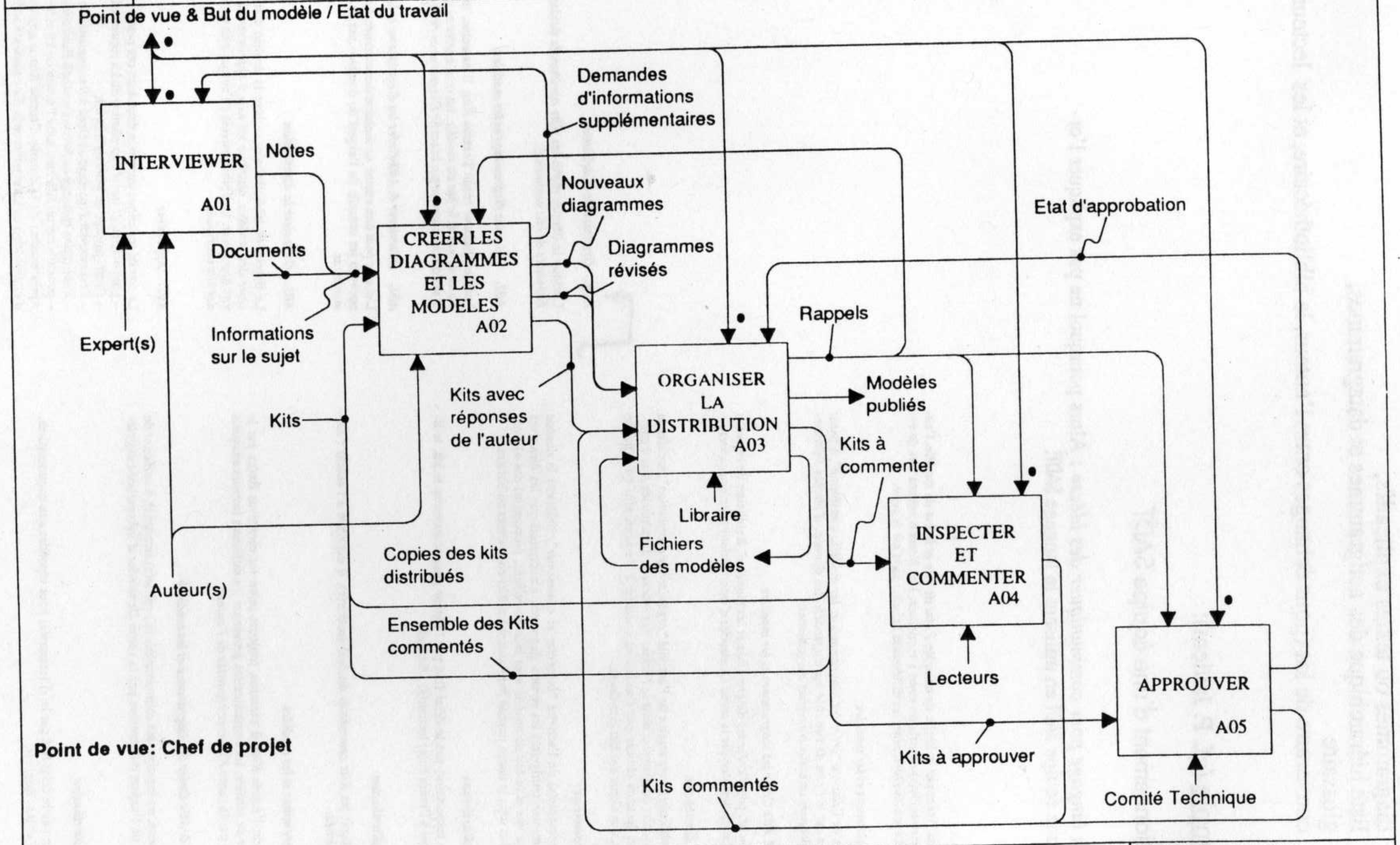
A030. Organiser la distribution

Si le comité technique ne respecte pas le délai fixé par le libraire, ce dernier lui envoie un rappel à l'ordre : *Rappels*.

A03. Organiser la distribution

Dès la reconnaissance par le libraire de *L'état d'approbation* publication, le kit peut être publié : *Modèle publié*. Pour tous les autres cas, le cycle auteur-lecteur se poursuit.

USED AT:	AUTHOR: P. JAULENT PROJECT: Génie Logiciel: Approche Industrielle NOTES: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	DATE: 1 / 08 / 89 REV:	WORKING DRAFT X RECOMMENDED PUBLICATION	READER DATE	CONTEXT: A-0



NODE: A0	TITLE: PRATIQUER LA METHODE SADT	NUMBER: PJ_OOO1

II-4 MERISE (Méthode d'Etude et de Réalisation Informatique pour les Systèmes)

finalité: conception globale
(ex: refonte d'organisation d'une entreprise)

caractéristiques:

approche par 3 niveaux:

conceptuel (ex: finalités de l'entreprise) D
organisationnel (ex: postes de travail, ...) I
technique (ex: intégrations des moyens informatiques, ...) O

démarche structurée dans le temps, séparant données et traitements (deux équipes //):

étude de l'existant (50% du temps)
// Modèle Conceptuel de Données (25% du temps)
// Modèle Conceptuel des Traitements et Modèle Opérationnel des Traitements
validation, Modèle Logique des Données (10% du temps)
Modèle Physique des Données, Modèle Opérationnel des Traitements (15% du temps)

-> approche systémique par sa vision OID

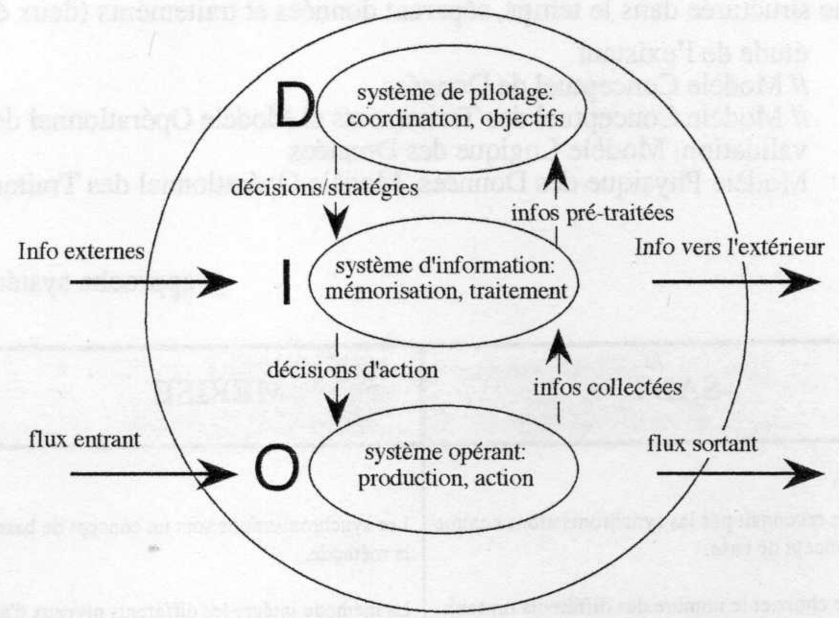
SADT	MERISE
Ne reconnaît pas les synchronisations comme concept de base.	Les synchronisations sont un concept de base de la méthode.
Le choix et le nombre des différents niveaux d'abstraction sont du ressort de l'utilisateur de la méthode.	La méthode intègre les différents niveaux d'abstraction et les fige.
Hiérarchie libre mise en évidence par la disposition des boîtes (parent, enfants).	Hiérarchie intégrée non formalisée.
L'archivage a lieu à chaque cycle auteur / lecteur, la cohérence est exprimée par les règles syntaxiques qui régissent la représentation.	La documentation trouve sa place à chacun des niveaux d'abstraction.
Le cycle de décision est limité au cycle auteur / lecteur. Les décisions d'identification sont en amont de SADT, les décisions techniques en aval.	MERISE couvre le cycle de décision depuis l'identification jusqu'aux décisions techniques.
Le découpage est calqué sur le cycle de vie d'un système. SADT est particulièrement bien adaptée aux étapes de " spécification préliminaire et détaillée d'un système ".	MERISE prévilégie un découpage sur les différentes catégories de décideurs (direction générale, utilisateurs, organisateurs, informaticiens,..)
Propose un modèle de données (datagrammes) et un modèle d'activité (actigrammes) selon divers points de vue.	Avec MERISE la relation entre deux ou plusieurs données n'est pas un traitement.
SADT est un méthode pour communiquer des idées qui nécessite aucune connaissance informatique. Facile à lire et à comprendre. SADT est une méthode internationale.	MERISE est une méthode informatique, pour informaticiens. MERISE est beaucoup plus complexe que SADT. MERISE méthode franco-française.

(comparaison entre SADT et MERISE... selon l'opinion de P. Jaulent)

caractéristiques MERISE:

vision globale
séparation données/traitements
approche par niveaux

vision globale:



séparation données/traitements et approche par niveaux:

niveaux	données	traitements
Conceptuel (D)	Modèle Conceptuel des Données (MCD) sémantique des données (non organisées): objets, relations, propriétés ex: établissement scolaire: adresse élève, nombre d'heures, nom élève, note, matière enseignée, nom du prof, n° salle,... + Règle 1: à chaque classe est attribuée une et 1 seule salle...	Modèle Conceptuel desTraitements (MCT) actions à mener (sans *qui le fait, quand, comment?*) ex: établissement scolaire: répartir les élèves par classe, attribuer les classes aux professeurs, ... sans: ce qui déclenche l'action, les résultats produits, la chronologie
Organisationnel(I)	Modèle Logique des Données (MLD) prendre en compte les besoins des utilisateurs (sécurité, performances, confort,...) ex: établissement scolaire Un élève peut accéder à sa note, un professeur peut accéder à toutes les notes de ses élèves,...	Modèle Organisationnel des Traitements (MOT) où, qui, quand? -> intégration des notions de poste de travail, traitement automatisé ou manuel, succession... ex: ét. scol.: répartir élèves en classes + attibuer matières par classe puis salle+prof+matière puis cours puis évaluation...
Technique (O)	Modèle Physique des Données (MPD) intégration des moyens techniques (supports d'info, ...) ex: établissement scolaire: salles de classe, bulletins et fichiers de notes, ...	Modèle Opérationnel des Traitements (MOpT) programmes info, ... ex: établissement scolaire: logiciels dédiés gestion notes, emplois du temps, ...

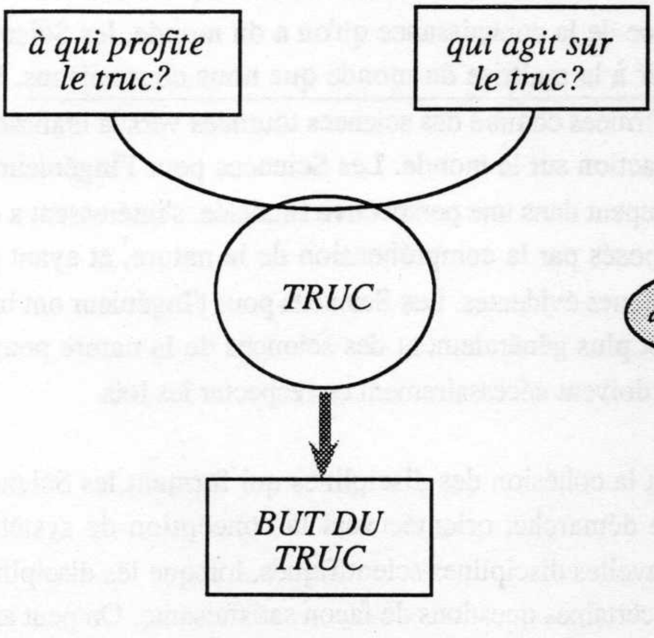
II-5 A.V. (Analyse de la Valeur)

-> outils de formulation fonctionnelle du besoin (but)

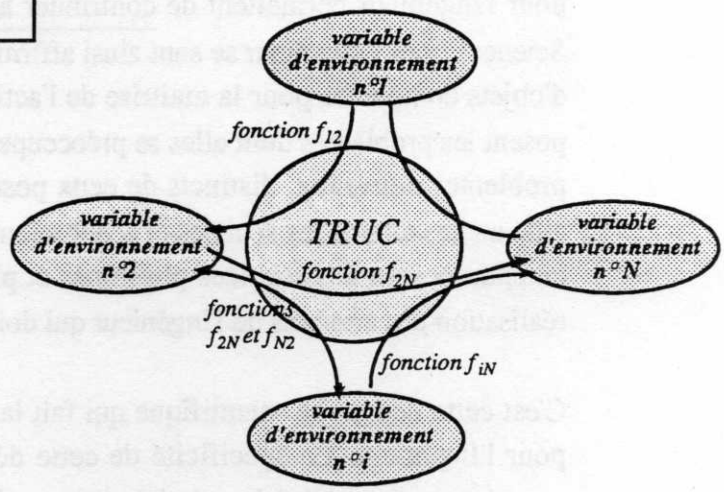
"bête à corne": à qui rend service l'artefact..., sur quoi/qui agit il?..., pour faire quoi?
"pieuvre": liste *exhaustive* des relations entre groupes d'acteurs, environnement...

-> expression des fonctions: le CdCF (cahier des charges fonctionnel)

verbe (action) = à l'infinitif, forme active, sans préjuger d'une solution (lier > ~~visser~~)
suivi d'un complément
contrôle de validité (pérénité) du but: pour..., parce que..., disparition?, évolution?
critères de valeur: documenter les termes utilisés (verbe, complt, ...)



(la bête à cornes)



(la pieuvre)

-> approche fonctionnelle, analytique par sa demande d'exhaustivité

III Autour d'un exemple: le processus formation d'un ingénieur...

III-1 approche analytique (caricaturale?):
quels savoirs -> quelles disciplines?

III-2 approche fonctionnelle (AV):
quelles fonctions -> quelles capacités?

III-3 approche structurelle (par techniques de traitement de l'info):
quelle structure de couplage entre disciplines et capacités?

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE:

Daniel Durand — *la systémique* — col. que sais-je?, PUF, 1979

Patrick Jaulent — *génie logiciel des méthodes* — Armand Colin, 1990

Francis Le Gallou — *systémique (rapport du GESTA, AFCET)* — col.tecdoc, éd. Lavoisier, 1992

Jean-Louis Lemoigne — *les systèmes de décision dans les organisations* — PUF, 1974

Jean-Louis Lemoigne — *la modélisation des systèmes complexes* — Afcet Systèmes, Dunod, 1990

Jean-Claude Lugan — *la systémique sociale* — col. que sais-je?, PUF, 1993

ANNEXE 1

texte commun par les équipes CNRS SPI

MOTION

De la véritable nature des Sciences pour l'Ingénieur et de leur place au CNRS.

Les Sciences pour l'Ingénieur s'intéressent à la conception, à la réalisation, à la maitrise d'artefacts, ce qui les différencie des sciences de la nature que sont les sciences physiques, chimiques, naturelles, ou humaines dont la finalité est la découverte et la compréhension des lois de la nature. Si ces sciences sont la source de la connaissance qu'on a du monde, les Sciences pour l'Ingénieur permettent de contribuer à la maitrise du monde que nous construisons. Les Sciences pour l'Ingenieur se sont ainsi affirmées comme des sciences tournées vers la réalisation d'objets complexes pour la maitrise de l'action sur le monde. Les Sciences pour l'Ingénieur en posant les problèmes dont elles se préoccupent dans une perspective finalisée, s'intéressent a des problemes nouveaux, distincts de ceux posés par la compréhension de la nature, et ayant par ailleurs des retombées sociales et économiques évidentes. Les Sciences pour l'Ingénieur ont bien entendu besoin des sciences physiques et plus généralement des sciences de la nature pour la réalisation des artefacts de l'ingénieur qui doivent nécessairement en respecter les lois.

C'est cette démarche scientifique qui fait la cohésion des disciplines qui forment les Sciences pour l'Ingénieur. La spécificité de cette démarche, orientée vers la conception de systèmes complexes, a conduit à la création de nouvelles disciplines scientifiques, lorsque les disciplines classiques ne permettaient plus d'aborder certaines questions de facon satisfaisante. On peut ainsi citer l'informatique, la robotique, l'automatique ou encore le génie des procédés. Ces disciplines nouvelles sont des clés essentielles pour relever les grands défis technologiques actuels. La construction des artéfacts d'aujourd'hui et de demain donne une place primordiale à la représentation, à la manipulation, à la saisie, au suivi de l'information.

C'est en ce sens que la Section 07 (Informatique, Automatique, Traitement du Signal) joue aujourd'hui un role clé dans les Sciences pour l'Ingénieur. L'informatique présente par ailleurs la singularité d'associer à son versant formel, un versant matériel indissociable, établissant ainsi une étroite liaison, qu'il convient de maintenir, avec l'electronique traitée par la section 08. Un autre exemple tout aussi important, qui concerne d'autres sections du département Sciences Pour l'Ingenieur du CNRS, est la conception des matériaux nouveaux que demande la realisation des artefacts.

Les Sciences pour l'Ingénieur représentent en général des disciplines émergentes, ce qui fait qu'elles font figure de nouvelles sciences, aux contours encore évolutifs, à côté de plus anciennes disciplines établies comme les sciences physiques, chimiques, naturelles ou humaines. L'automatique, le traitement du signal, l'algorithmique, l'architecture de systèmes informatiques, l'intelligence artificielle, la robotique ou la communication homme-machine pour ne prendre que des exemples dans la Section 07, ne peuvent plus se ramener à aucune des disciplines "classiques" (physique, mathématiques, chimie, ...) dont elles sont historiquement issues. Depuis 20 ans, le departement Sciences pour l'Ingenieur du CNRS a permis un épanouissement de ces nouvelles disciplines qu'il semble important de renforcer dans le futur.

Les mathématiques ont une place à part par rapport aux sciences de la nature et aux Sciences pour l'Ingenieur, même si on peut être tenté de les tirer d'un côté ou de l'autre, car elles fournissent des outils aux deux. Les Sciences pour l'Ingénieur, comme les sciences de la nature utilisent des mathématiques deja constituées, mais posent aussi de nouveaux problemes aux mathématiciens (c'est le cas par exemple des mathématiques discrètes pour l'informatique, des équations différentielles et de l'algèbre différentielle pour l'automatique du continu). D'ailleurs dans certaines Sciences pour l'Ingénieur, notamment l'informatique, les objets symboliques manipulés sont de nature mathématique, comme par exemple les langages formels, la recherche étant alors centree sur la mécanisation de ces manipulations. Cette approche s'est même étendue aux objets mathématiques traditionnels sous le nom de calcul formel.

Il est à noter que les Sciences pour l'Ingénieur ont avec les mathématiques le point commun d'être en contact avec beaucoup d'autres disciplines. Les Sciences pour l'Ingénieur ont également une interaction en retour vers les disciplines des départements Sciences De la Vie et Sciences Humaines et Sociales du CNRS en permettant que des modèles formels developpés en vue de la conception d'artéfacts puissent être à la base de concepts théoriques utiles pour la description du vivant, du comportement humain, ou de la société. Ceci est notamment illustré par les sciences cognitives ou des disciplines telles que les neurosciences, la psychologie cognitive ou la linguistique ont bénéficié de concepts forgés par l'informatique, qu'il s'agisse par exemple de formalisations aussi différentes que les réseaux de neurones formels ou les modèles logiques de raisonnements.

Des collaborations en cours continuent de montrer comment le département Sciences Pour l'Ingenieur participe à des actions transdisciplinaires mutuellement fécondes avec d'autres départements.. Il faut souligner dans cette dynamique le rôle primordial des chercheurs et la richesse irremplacable du savoir-faire qu'ils mettent déjà au service d'autres disciplines, et qui va bien au delà de ce que peut apporter une simple "agence de moyens". C'est ce potentiel et cette culture qu'il convient de renforcer, et non de détruire. La maitrise scientifique de l'ingénierie s'avère donc un enjeu essentiel qui passe par le développement de disciplines scientifiques authentiques et spécifiques qui fondent sa mise en oeuvre et son propre développement : les Sciences pour l'Ingénieur.

ANNEXE 3

COMMISSION DES COMMUNAUTÉS EUROPÉENNES

CELLULE DE PROSPECTIVE

Marc LUYCKX

Bruxelles, le 18 octobre 1993

ML/ CdP 93/2377

RATIONALITY IN THE MULTICULTURAL CONTEXT AND THE SCIENTIFIC RESPONSIBILITY OF SYSTEMS ENGINEERS

Contribution to the "IIEE / SMC '93 Conference, Systems Engineering in the Service of Humans" Le TOUQUET 19 october 1993.

par Marc LUYCKX

The following paper is the fruit of personal research carried out in the course of my work at the Forward Studies Unit. It in no way reflects the official positions of either the Commission or the President.

1. Rationality is changing satus in a changing society.

The Commission organised recently in Oxford a small "Carrefour de la Science et de la Culture" putting in contact high level members of the Commission with Nobel prizes in different Sciences. There was long exchange on the changes in Science and in society, and on the epistemological transformation of rationality. My hypothesis is that there is a important change in the scientific paradigm but that this change is occurring in a more global and broader cultural change.

1.1.changes in scientific rationality .

Recent developments in Science, like the research of Prigogine[1], but already of Heisenberg, show that one part of the scientists have been forced trough their research to abandon the hope to discover a true and adequate description of universal and exact laws of nature. Nature as Prigogine[2] notes is neither transparent, previsible, manipulable, or stable, and humans (scientists) must cease to consider themselves as "objective" observers out of time and space.
If one agrees with this new vision of science one must draw a major consequence : **scientific rationality cannot anymore pretend to be in possession of the true laws of nature...** if they exist. Rationality has lost its privilege of having direct access to the truth i.e. of objectivity and neutrality. "Exact" science is thus more similar to other human sciences. It has a more humble and progressive (asymptotic) approach of the truth.

Naturally science must still be leading to efficient action, even if it is not identifyable with the "exact truth" anymore, because it is the best one we have at the present moment for a given collectivity.

[1] I PRIGOGINE is currently one of the tree main advisers of the Commission for science policy.
[2] I. PRIGOGINE et I. STENGERS : La Nouvelle Alliance Gallimard Paris 1979. p 290.-296.

Rue de la Loi 200, bureau A-25 8/9, B-1049 Bruxelles - Belgique
Téléphone: ligne directe +32-2-295.03.44, secrétariat : +32-2-29........, fax +32-2-295.23.05

But if scientific rationality is not anymore "neutral" neither "objective", it must accept to be "in" and not "above" ethics and politics. Scientists are thus invited to accept that they cannot escape their social, political and ethical responsibilities. It is normal that society asks scientist to give account of their options and choices.

2. malaise of some scientists.

Some scientists resent those new demands about their responsibilities as a plot against science. They have sometimes the impression to be submitted to a new trial of Galilee. They judge the critics against science as **of scientific rationality, and as a return to the Middle Ages.** Their reaction is thus to start campaigns of "explanations" in order to combat what they feel like ignorance backwarness and lack of information.

It is probably true that some criticisms have a real anti-rational tone. Our hypothesis though is that the main reason for this change of behaviour in the public is not at all a plot against science but an important cultural change of our world.

3. What cultural change ?

According to our analysis the cultural change is much broader that the changing in the scientific paradigm, although the changing of status of the scientific rationality is an important element of it. Other important elements of this change are :

1. the transition towards the **"information society",** which presupposes an important change in the human relations, precisely because of the new possibilities of those new electronic tools. As industrial society was characterised by the importance of capital, of the quantitative element, by analytic approach, and money efficiency, it seems that in this new society, information will be more important than capital, qualitative approach will prevail on quantitative, holistic approach will use analysis but be prevalent on it. Meaning and signification will slowly prevail on efficiency...
2. It is selfevident also that we are going to be compelled to imagine the world market of tomorrow non-linear ways of reasoning, and "fuzzy" logics... This will bring us to much more sophisticated models than just "free trade"...We will have to convert our "rational" management method to "management in complexity"...
3. This new possibility of communication permits also a **globalization of information.** This brings also the cultures in closer contact, and relativizes the dominance of the western cultures on the others. We see the resurrection of the cultural element, for the best and the worse. (religious wars etc...). **We are going thus from a "westernized" towards a muticultural world society.**
4. Independently of those elements it is also clear that this end of XXth century sees the **roles of women and men changing** fast, partly because of the possibilities of birth control.
5. Some sociologists say also that we are leaving slowly the consuming society and that we entering in a **society of signification** (société du sens).

One could add other elements and there are others to be added. What is important is to situate what is happening to rationality in a broader context of